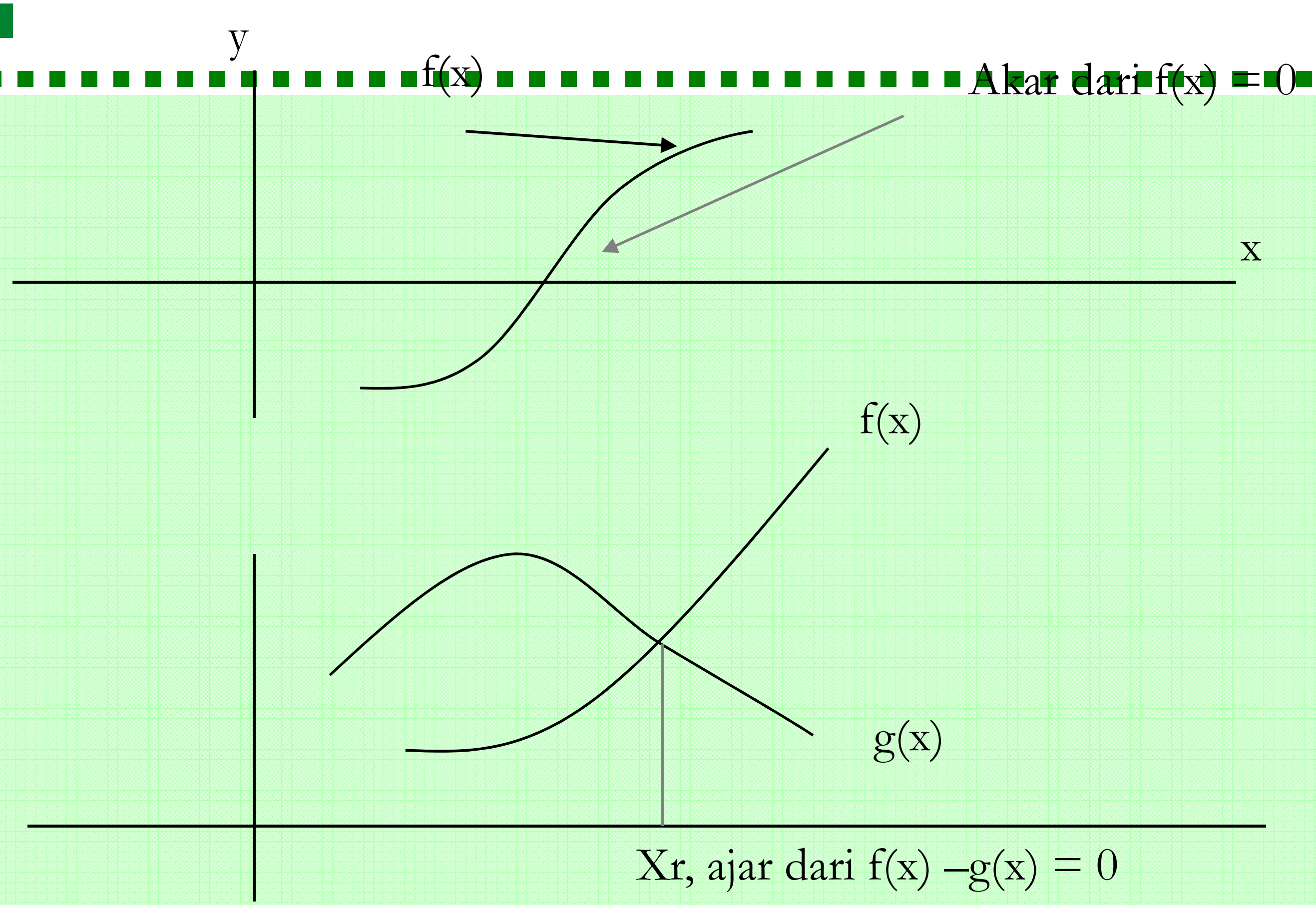
BAB IV

Pencarian Akar Persamaan Tak Linier

Pendahuluan

- Salah satu masalah dalam matematika & teknik
- Akar dari f(x) adalah x sehingga f(x) = 0.
- Secara geometris, ajar dari f(x) adalah nilai x sehingga kurva f(x) memotong sumbu x
- Akar (x) juga bisa merupakan perpot dari dua fungsi f(x) dan g(x), sehingga f(x) = g(x), atau f(x) – g(x) = 0


y
f(x)
Akar dari f(x) = 0
x
f(x)
g(x)
Xr, ajar dari f(x) –g(x) = 0

- Contoh :

  Akan dicari nilai x sehingga $f(x)= 2x^2 + 5x -3 = 0$,

  maka $2x^2 + 5x -3 = (2x – 1)(x +3) = 0$, diperoleh

  $x_{akar1} = ½$, $x_{akar2} = -3$
- Secara umum, untuk fungsi linier $f(x) = ax + b$, maka $x_{akar} = -b/a$
- Untuk fungsi kuadrat $f(x) = ax2 + bx +c$, maka

$$x_{akar1,akar2} = -b \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{2a}}$$

- Untuk fungsi dengan derajat lebih tinggi, perlu dicari teknik yang lebih sistematis, sebagai contoh :

  Carilah akar dari $(x+1)^2 e^{x2-2}-1=0$

  Disinilah peranan metode numerik di dalam memberikan hampiran suatu penyelesaian permasalahan matematis yang tidak dapat diselesaikan secara analitik

Metode Pengurung (Braches Method)

1. Metode Bagi 2 (bisection)
2. Metode Posisi palsu (Regula falsi)

Metode Terbuka

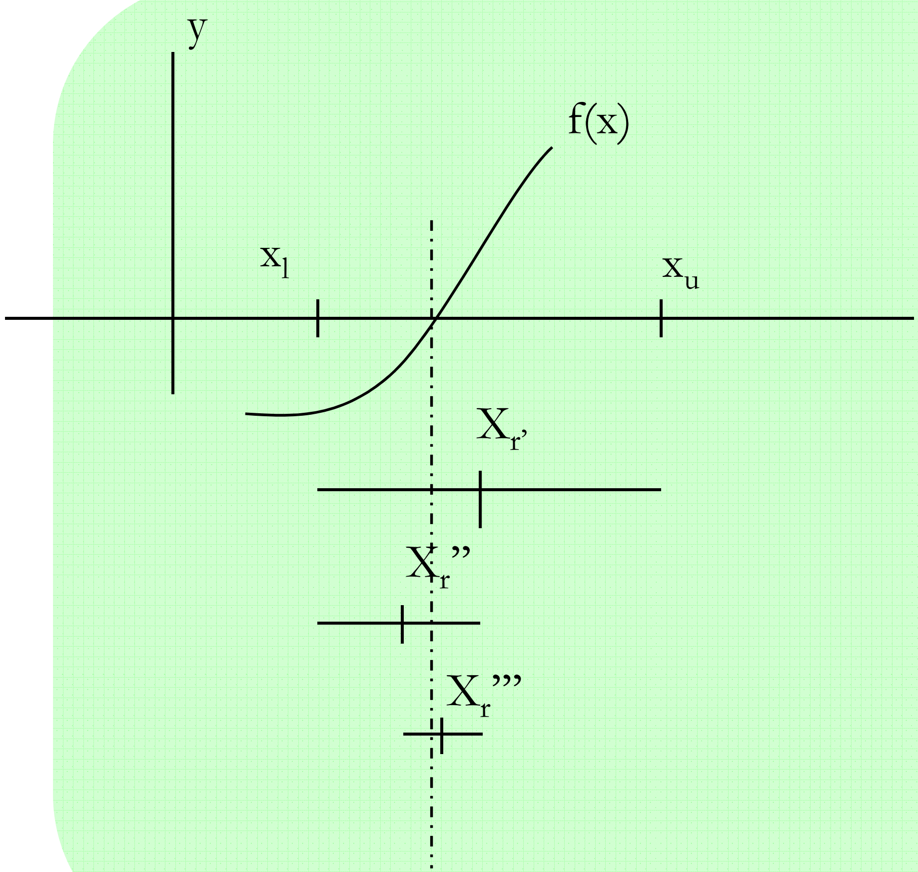
1. Iterasi satu titik tetap
2. Newton Raphson
3. Secant

METODE BAGI DUA

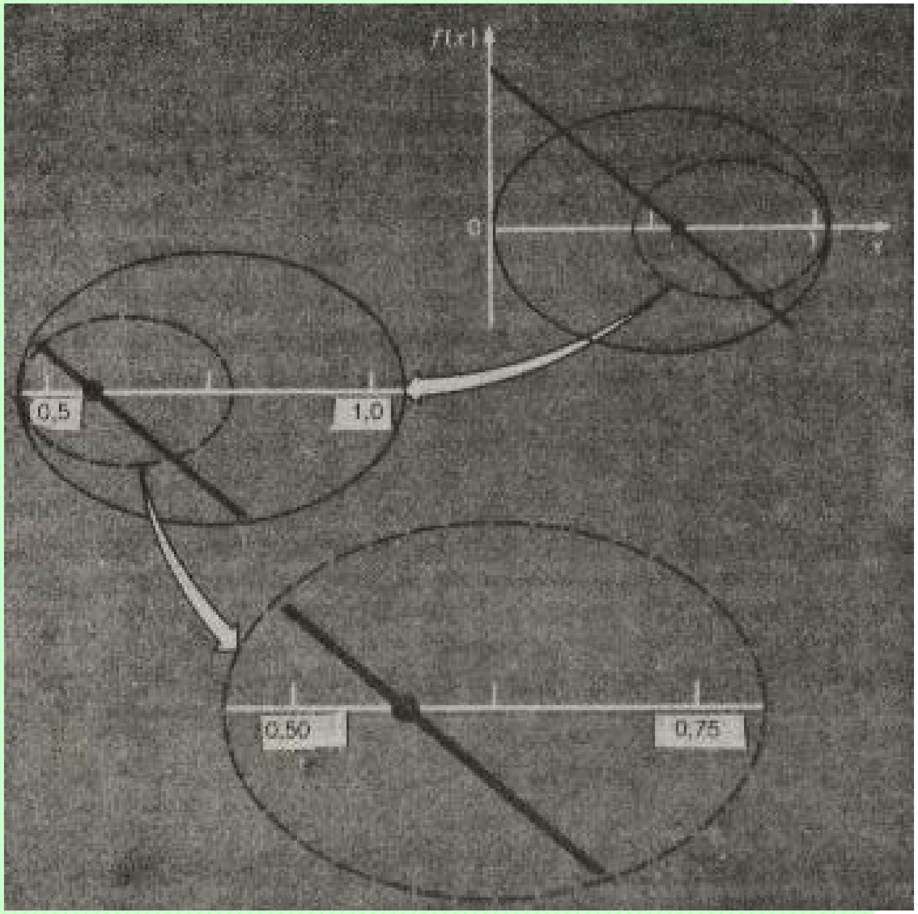
- Misal f(x) fungsi kontinu pada [a,b] sehingga f(a) & f(b) berlawanan tanda, maka menurut Teorema Nilai Antara terdapat x_r pada [a,b] sehingga $f(x_r) = 0$
- Teknik yang digunakan dalam metode ini adalah pencarian ajar dengan memperkecil interval pengurung [a,b].
- Interval awal dibagi menjadi 2 sub interval dengan panjang yang sama, pilih sub interval yang mengandung ajar, sub interval ini dibagi dua lagi menjadi sub interval yang lebih kecil, pilih lagi sub interval yang memuat ajar, dan seterusnya sampai diperoleh ajar sejati.

Algoritma bagi 2

1. Pilih x_l dan x_u sehingga $f(x_l).f(x_u) < 0$ (berlainan tanda)
2. Tarik akar $x_r = \frac{x_l + x_u}{2}$
3. Evaluasi :
   a) Jika $f(x_l).f(x_u) < 0$, maka akar berada pada (x_l, x_r), rubah x_r menjadi x_u baru, kembali ke langkah 2
   b) Jika $f(x_l).f(x_u) > 0$, maka akar berada pada (x_r, x_u), rubah x_r menjadi x_l baru. Kembali ke langkah 2
   c) Jika $f(x_l).f(x_u) = 0$, akar = x_r, stop



y
f(x)
x_l
x_u
X_r'
X_r''
X_r'''



f(x)
0
0,5
1,0
0,50
0,75

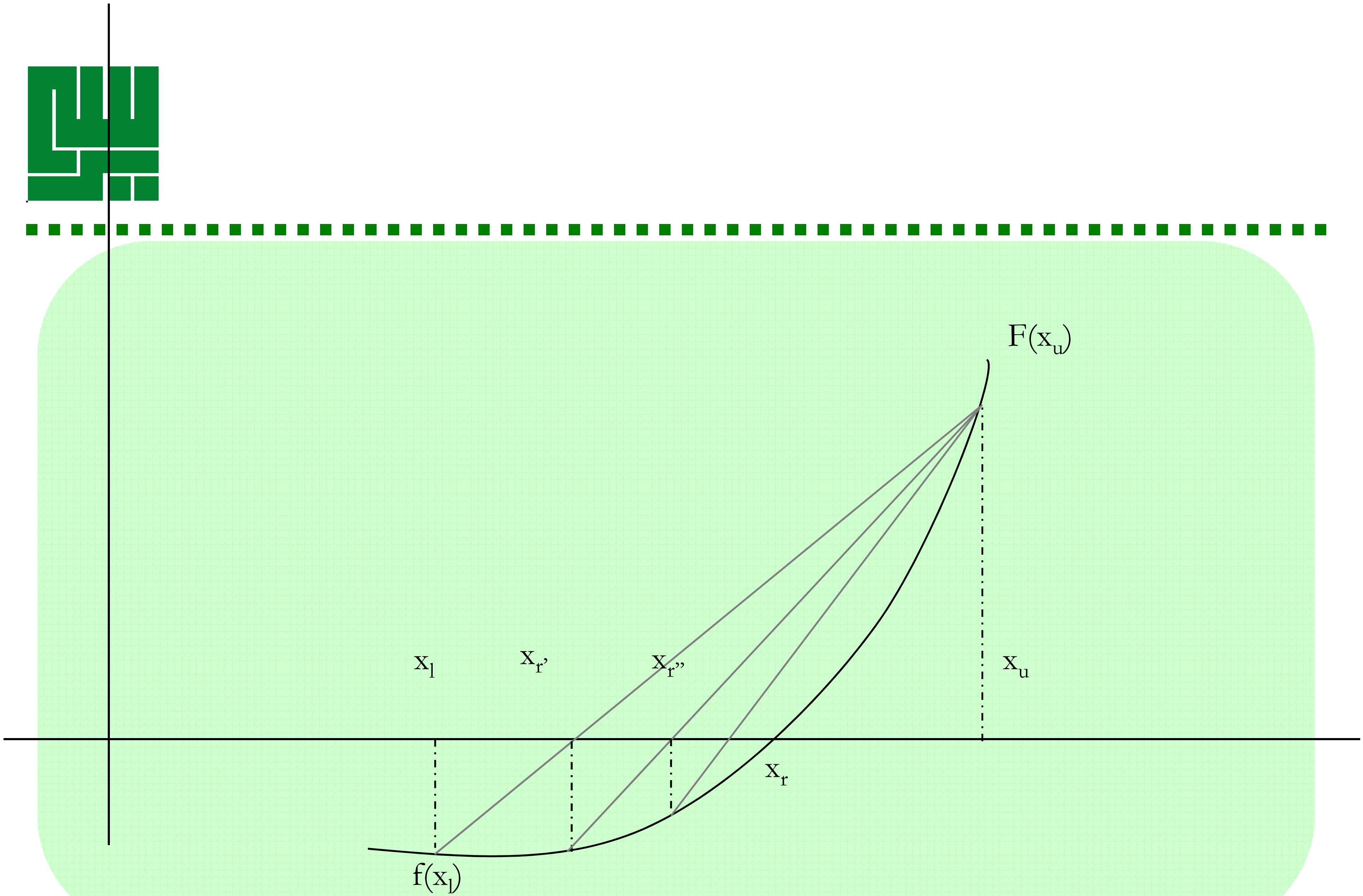
- Taksiran galat $\left|\in_a\right| = \left|\frac{x_r lama - x_r baru}{x_r lama}\right| x100\%$
- Contoh :

cari akar dari $f(x) = (x+1)^2 e^{x^2-2} - 1$ pada [0.4, 1.2].

(x+1)^2e^(x^2-2)-1									
Iterasi	xl	xu	xr	f(xl)	f(xr)	f(xl)*f(xr)	xl baru	xu baru	galat
1	0.4	1.2	0.8	-0.688717845	-0.168419083	0.115993228	0.8	1.2	
2	0.8	1.2	1	-0.168419083	0.471517765	-0.079412589	0.8	1	20
3	0.8	1	0.9	-0.168419083	0.098238763	-0.016545282	0.8	0.9	11.11111
4	0.8	0.9	0.85	-0.168419083	-0.046035406	0.007753241	0.85	0.9	5.882353
5	0.85	0.9	0.875	-0.046035406	0.023105202	-0.001063657	0.85	0.875	2.857143
6	0.85	0.875	0.8625	-0.046035406	-0.012179628	0.000560694	0.8625	0.875	1.449275
7	0.8625	0.875	0.86875	-0.012179628	0.005279969	-6.43081E-05	0.8625	0.86875	0.719424
8	0.8625	0.86875	0.865625	-0.012179628	-0.003495002	4.25678E-05	0.865625	0.86875	0.361011
9	0.865625	0.86875	0.867188	-0.003495002	0.000881124	-3.07953E-06	0.865625	0.867188	0.18018
10	0.865625	0.867188	0.866406	-0.003495002	-0.001309771	4.57765E-06	0.86640625	0.867188	0.090171
11	0.86640625	0.867188	0.866797	-0.001309771	-0.000215032	2.81643E-07	0.866796875	0.867188	0.045065
12	0.866796875	0.867188	0.866992	-0.000215032	0.000332869	-7.15775E-08	0.866796875	0.866992	0.022528
13	0.866796875	0.866992	0.866895	-0.000215032	5.88739E-05	-1.26598E-08	0.866796875	0.866895	0.011265
14	0.866796875	0.866895	0.866846	-0.000215032	-7.80902E-05	1.67919E-08	0.866845703	0.866895	0.005633
15	0.866845703	0.866895	0.86687	-7.80902E-05	-9.61091E-06	7.50518E-10	0.866870117	0.866895	0.002816

Metode Posisi Palsu (Regula Falsi)

- Metode bagi 2 tidak efisien, besaran f(xl) dan f(xu) tidak diperhitungkan
- Jika f(xl) lebih dekat ke 0 d.p f(xu), akar lebih dekat ke xl
- Metode posisi palsu menghub f(xl) & f(xu) dengan sebuah garis lurus, perpotongan garis tersebut dengan sb x merupakan taksiran akar yang diperbaiki (posisi palsu)



F(x_u)
x_l
x_r'
x_r''
x_u
x_r
f(x_l)

$$x_r = x_u - \frac{f(x_u)(x_l - x_u)}{f(x_l) - f(x_u)}$$

Iterasi	xl	xu	f(xl)	f(xu)	xr	galat
1	0	1.2	-0.864664717	1.764651869	0.39462637	
2	0.39462637	1.2	-0.692419039	1.764651869	0.621586053	36.51299
3	0.621586053	1.2	-0.476292181	1.764651869	0.744522652	16.51214
4	0.744522652	1.2	-0.283032012	1.764651869	0.807478986	7.796653
5	0.807478986	1.2	-0.151352683	1.764651869	0.838485754	3.697948
6	0.838485754	1.2	-0.076012831	1.764651869	0.853414992	1.749353
7	0.853414992	1.2	-0.036924137	1.764651869	0.860518413	0.825482
8	0.860518413	1.2	-0.017640286	1.764651869	0.863878441	0.388947
9	0.863878441	1.2	-0.008359898	1.764651869	0.865463282	0.183121
10	0.865463282	1.2	-0.003946636	1.764651869	0.866209803	0.086182
11	0.866209803	1.2	-0.001859785	1.764651869	0.866561217	0.040553
12	0.866561217	1.2	-0.000875639	1.764651869	0.866726591	0.01908
13	0.866726591	1.2	-0.000412109	1.764651869	0.866804404	0.008977
14	0.866804404	1.2	-0.000193917	1.764651869	0.866841015	0.004223
15	0.866841015	1.2	-9.12392E-05	1.764651869	0.86685824	0.001987

Metode terbuka

- Metode pengurung, akarnya terdapat dalam selang yang telah ditentukan oleh batas atas dan batas bawah, penerapan yang berulang-ulang selalu menghasilkan taksiran nilai sejati dari akar yang lebih dekat, metode ini konvergen karena selalu bergerak semakin dekat ke akar yang sebenarnya.

- Metode terbuka didasarkan pada rumus yang memerlukan satu atau lebih nilai yang tidak perlu mengurung akar sehingga kadangkala divergen (menjauhi akar), namun jika metode tersebut konvergen, biasanya lebih cepat d.p metode pengurung

Iterasi satu titik tetap

- Misal $f(x) = 0$ dapat disusun menjadi $x= g(x)$, dengan memilih titik awal x0, hampiran-hampiran selanjutnya diperoleh dengan iterasi

  $x_{n+1} = g(x_n)$
- Proses akan konvergen jika x_{n+1} terletak di dalam sebuah interval I yang memuat akar x_r

- Contoh

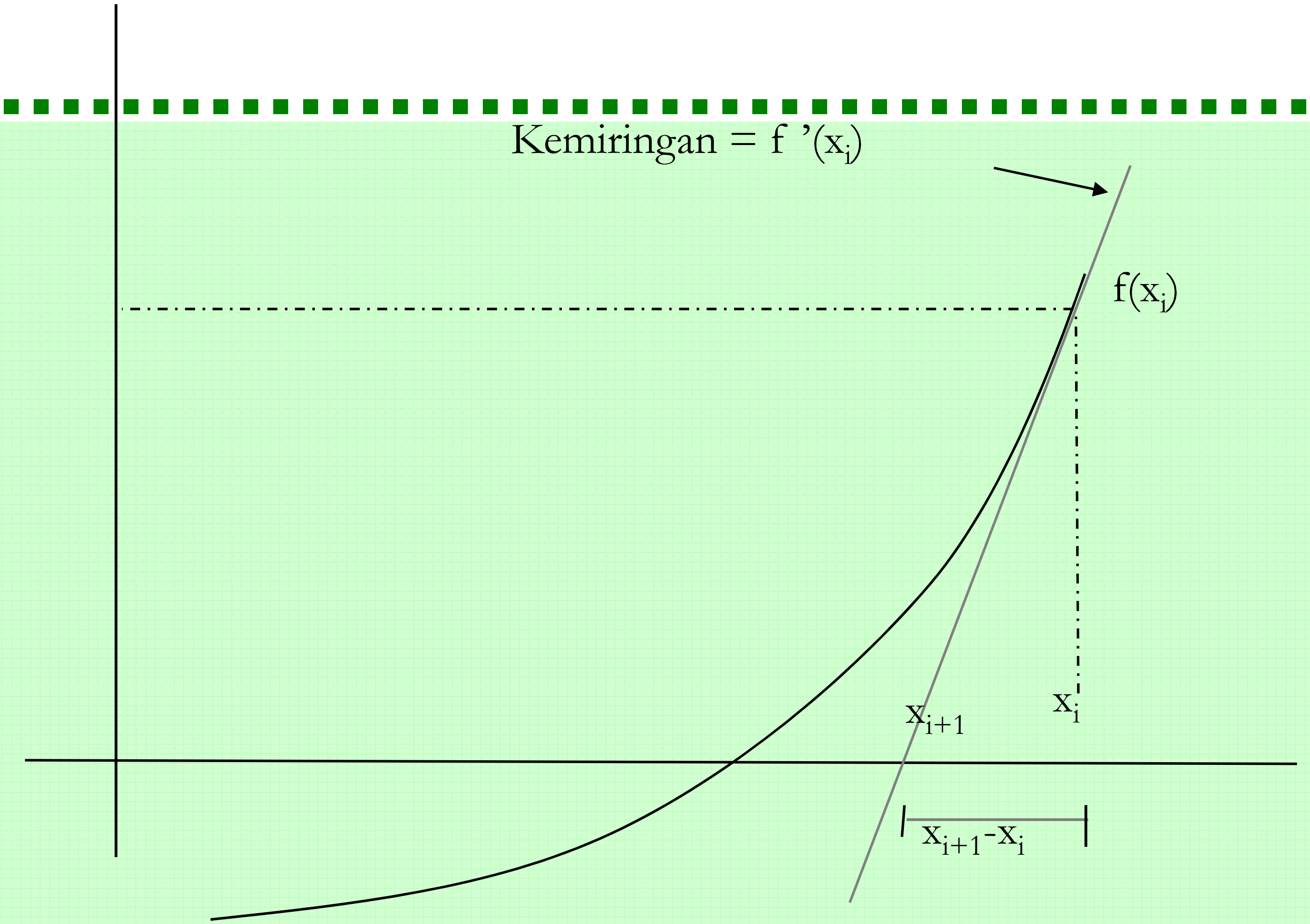
  x^2-2x-8 = 0, dapat diubah menjadi $x = \dfrac{2x+8}{x}$ $\quad x = \dfrac{x^2-8}{2}$

n	xn	x(n+1)=(2xn+8)^0.5		xn	x(n+1)=2xn+8/xn		xn	x(n+1)=((xn^2)-8)/2
1	5	4.242640687		5	3.6		5	8.5
2	4.2426407	4.060207061		3.6	4.222222222		8.5	32.125
3	4.0602071	4.015023552		4.222222222	3.894736842		32.125	512.0078125
4	4.0150236	4.003754126		3.894736842	4.054054054		512.0078125	131072
5	4.0037541	4.000938421		4.054054054	3.973333333		131072	8589934592
6	4.0009384	4.000234598		3.973333333	4.013422819		8589934592	3.68935E+19
7	4.0002346	4.000058649		4.013422819	3.993311037		3.68935E+19	6.80565E+38
8	4.0000586	4.000014662		3.993311037	4.003350084		6.80565E+38	2.31584E+77
9	4.0000147	4.000003666		4.003350084	3.99832636			
10	4.0000037	4.000000916		3.99832636	4.00083717			
11	4.0000009	4.000000229		4.00083717	3.999581502			
12	4.0000002	4.000000057		3.999581502	4.000209271			
13	4.0000001	4.000000014		4.000209271	3.99989537			
14	4	4.000000004		3.99989537	4.000052316			
15	4	4.000000001		4.000052316	3.999973842			
16	4	4		3.999973842	4.000013079			

Metode Newton Raphson

- Jika terkaan awal pada akar adalah x_i, sebuah garis singgung dapat ditarik dari $[x_i, f(x_i)$, titik potong dengan sumbu x biasanya menyatakan taksiran akar yang lebih baik.

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$



Kemiringan = f '(x_i)
f(x_i)
x_{i+1}
x_i
x_{i+1}-x_i

Contoh : Carilah akar dari e^x-x-2=0, dengan terkaan awal x0=-5

$$x_{n+1} = x_n - \frac{e^{x_n} - x_n - 2}{e^{x_n} - 1}$$

n	xn	xn+1
1	-5	-1.97286538
2	-1.97286538	-1.842864533
3	-1.842864533	-1.841405861
4	-1.841405861	-1.84140566
5	-1.84140566	-1.84140566
6	-1.84140566	-1.84140566
7	-1.84140566	-1.84140566
8	-1.84140566	-1.84140566
9	-1.84140566	-1.84140566
10	-1.84140566	-1.84140566
11	-1.84140566	-1.84140566
12	-1.84140566	-1.84140566
13	-1.84140566	-1.84140566

Metode Secant

- Metode ini memerlukan dua buah hampiran awal x_0 dan x_1, hampiran berikutnya diperoleh dengan menghitung absis titik potong garis busur yang melalui titik-titik $(x_0, f(x_0))$ dan $(x_1, f(x_1))$;

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)(x_1 - x_0)}{f(x_1) - f(x_0)}$$

Contoh : Carilah akar dari e^x-x-2=0, dengan terkaan awal x0=-10, x1 = -9

i	x0	x1	f(x0)	f(x1)	x2
1	-10	-9	8.0000454	7.00012341	-1.999330469
2	-9	-1.999330469	7.00012341	0.134756394	-1.861918299
3	-1.9993305	-1.861918299	0.134756394	0.017292589	-1.841688985
4	-1.8619183	-1.841688985	0.017292589	0.000238397	-1.841406203
5	-1.841689	-1.841406203	0.000238397	4.56787E-07	-1.84140566
6	-1.8414062	-1.84140566	4.56787E-07	1.21956E-11	-1.84140566
7	-1.8414057	-1.84140566	1.21956E-11	0	-1.84140566
	-1.8414057	-1.84140566	0	0	#DIV/0!
	-1.8414057	#DIV/0!	0	#DIV/0!	#DIV/0!
	#DIV/0!	#DIV/0!	#DIV/0!	#DIV/0!	#DIV/0!
	#DIV/0!	#DIV/0!	#DIV/0!	#DIV/0!	#DIV/0!
	#DIV/0!	#DIV/0!	#DIV/0!	#DIV/0!	#DIV/0!