

### BAB V

# Sistem Persamaan Linier



- Salah satu hal penting dalam aljabar linear dan dalam banyak masalah matematika terapan adalah menyelesaikan suatu sistem persamaan linear .
- Representasi Sistem Persamaan Linear
   Sistem n persamaan linear dengan n variabel dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$
  
 $a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2$   
 $\vdots$   $\vdots$   $\vdots$   $\vdots$   $\vdots$   
 $a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m$ 

• Dimana  $x_1, x_2, \ldots, x_n$  variabel tak diketahui,  $a_{ij}, b_i$ ,  $i = 1, 2, \ldots, m$ ;  $j = 1, 2, \ldots, n$  bil. diketahui. Ini adalah SPL dengan m persamaan dan n variabel.



### PENYAJIAN SPL DALAM MATRIKS

### SPL

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$
  
 $a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2$   
 $\vdots$   $\vdots$   $\vdots$   $\vdots$   $\vdots$   $\vdots$   $a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m$ 

### **BENTUK MATRIKS**

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$

### STRATEGI MENYELESAIKAN SPL:

mengganti SPL lama menjadi SPL baru yang mempunyai penyelesaian sama (ekuivalen) tetapi dalam bentuk yang lebih sederhana.



### • Contoh:

Selesaikan SPL berikut

$$3x - 2y = 7$$
$$2x + y = 14$$

- Penyelesaian permasalah di atas:
  - Substitusi
  - Eliminasi
  - Grafik
  - Determinan



### TIGA OPERASI STANDAR PENYELESAIAN SPL

- 1. Mengalikan suatu persamaan dengan konstanta tak nol.
- Mengalikan suatu baris dengan konstanta tak nol.

2. Menukar posisi dua persamaan sebarang.

- Menukar posisi dua baris sebarang.
- 3. Menambahkan kelipatan suatu persamaan ke persamaan lainnya.
- Menambahkan kelipatan suatu baris ke baris lainnya.

Ketiga operasi ini disebut OPERASI BARIS ELEMENTER (OBE)

SPL atau bentuk matriksnya diolah menjadi bentuk sederhana sehingga tercapai 1 elemen tak nol pada suatu baris



### DIKETAHUI

kalikan pers (i) dengan (-2), kemudian tambahkan ke pers (ii).

kalikan pers (i) x + y + 2z = 9 dengan (-3), kemudian tambahkan ke 2y - 7z = -17  $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 2 & -7 & -17 \\ 3y - 11z = -27 \end{bmatrix}$ pers (iii).

kalikan pers (ii) dengan (1/2).

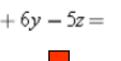
### CONTOH

$$x + y + 2z = 9$$
  
 $2x + 4y - 3z = 1$   
 $3x + 6y - 5z = 0$ 

$$x + y + 2z = 9$$
$$2x + 4y - 3z = 1$$
$$3x + 6y - 5z = 0$$

$$x + y + 2z = 9 
2y - 7z = -17 
3x + 6y - 5z = 0$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 2 & -7 & -17 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{bmatrix}$$

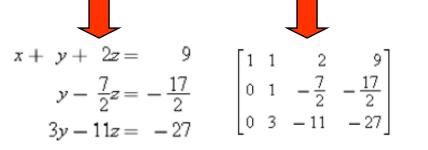




$$x + y + 2z = 5$$

$$2y - 7z = -17$$

$$3y - 11z = -27$$



$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{17}{2} \\ 0 & 3 & -11 & -27 \end{bmatrix}$$

kalikan baris (i) dengan (-2), lalu tambahkan ke baris (ii).

kalikan baris (i) dengan (-3), lalu tambahkan ke baris (iii).

kalikan baris (ii) dengan (1/2).



kalikan pers (ii) dengan (1/2).

$$x + y + 2z = 9$$

$$y - \frac{7}{2}z = -\frac{17}{2}$$

$$3y - 11z = -27$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{17}{2} \\ 0 & 3 & -11 & -27 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{17}{2} \\ 0 & 3 & -11 & -27 \end{bmatrix}$$

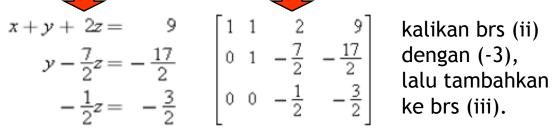
kalikan baris (ii) dengan (1/2).

kalikan pers (ii) dengan (-3), lalu tambahkan ke pers (iii).

$$x + y + 2z = 9$$

$$y - \frac{7}{2}z = -\frac{17}{2}$$

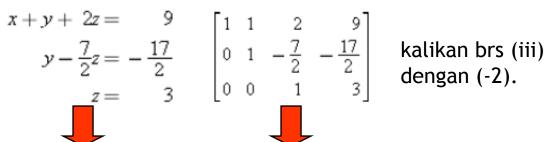
$$-\frac{1}{2}z = -\frac{3}{2}$$



kalikan pers (iii) dengan (-2).

(i).

kalikan pers (ii) 
$$x + \frac{11}{2}z = \frac{1}{2}z = \frac{1}{2}z$$





$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{11}{2} & \frac{35}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{17}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

kalikan brs (ii) dengan (-1), lalu tambahkan ke brs (i).

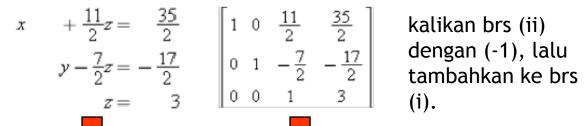


kalikan pers (ii) dengan (-1), lalu tambahkan ke pers (i).

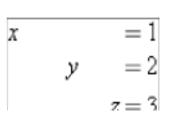
$$x + \frac{11}{2}z = \frac{35}{2}$$

$$y - \frac{7}{2}z = -\frac{17}{2}$$

$$z = 3$$



kalikan pers (iii) dengan (-11/2), lalu tambahkan ke pers (i) dan kalikan pers (ii) dg (7/2), lalu tambahkan ke pers (ii)





x = 1 y = 2  $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ Kalikan Drs (iii)
dengan (-11/2), lalu
tambahkan ke brs (i)
dan kalikan brs (ii) dengan kalikan brs (ii) kalikan brs (iii) dan kalikan brs (ii) dg (7/2), lalu tambahkan ke brs (ii)

Diperoleh x = 1, y = 2, z = 3. Terdapat kaitan menarik antara bentuk SPL dan representasi matriksnya. Metoda ini disebut dengan METODA ELIMINASI GAUSS.



## Eliminasi gauss

Prosedur penyelesaian dari metoda ini adalah mengurangi sistem persamaan ke dalam bentuk segitiga sedemikian sehingga salah satu dari persamaan-persamaan tersebut hanya mengandung satu bilangan tak diketahui, dan setiap persamaan berikutnya hanya terdiri dari satu tambahan bilangan tak diketahui baru



# Metode Gauss Jordan

- Metode Gauss jordan adalah pengembangan dari eliminasi gauss
- Matriks di rubah menjadi segitiga bawah dan atas (matriks identitas)
- Variabel persamaan bisa langsung dibaca

# **C**ontoh:

### Selesaikan sistem persamaan berikut ini:

$$3 \times -0.1 \text{ y} - 0.2 \text{ z} = 7.85$$
  
 $0.1 \times +7 \text{ y} - 0.3 \text{ z} = -19.3$   
 $0.3 \times -0.2 \text{ y} + 10 \text{ z} = 71.4$ 

### Dalam bentuk bentuk matriks:

$$\begin{bmatrix} 3 & -0.1 & -0.2 \\ 0.1 & 7 & -0.3 \\ 0.3 & -0.2 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7.85 \\ -19.3 \\ 71.4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & -0.1 & -0.2 \\ 0.1 & 7 & -0.3 \\ 0.3 & -0.2 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7.85 \\ -19.3 \\ 71.4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0.1 & -0.2 \\ 0 & 7.003 & -0.293 \\ 0 & -2.19 & 10.02 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7.85 \\ -19.562 \\ 70.615 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 0.1 & -0.2 \\ 0 & 7.003 & -0.293 \\ 0 & 0 & 10.012 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7.85 \\ -19.562 \\ 70.084 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -0.0333 & -0.06667 \\ 0 & 1 & -0.4188 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.61667 \\ -2.7932 \\ 7 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -0.0668 \\ 0 & 1 & -0.4188 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.5236 \\ -2.7932 \\ 7 \end{bmatrix}$$



$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -0.4188 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2.7932 \\ 7 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2,5 \\ 7 \end{bmatrix}$$

### Metode Gauss Seidel

 Metode ini menerapkan terkaan-terkaan awal dan kemudian diiterasi untuk memperoleh taksiran-taksiran yang diperhalus dari penyelesaiannya

#### Contoh:

Selesaikan sistem persamaan berikut ini:

$$3 \times -0.1 \text{ y} - 0.2 \text{ z} = 7.85$$
  
 $0.1 \times + 7 \text{ y} - 0.3 \text{ z} = -19.3$   
 $0.3 \times -0.2 \text{ y} + 10 \text{ z} = 71.4$ 

# prosedur:

- ➤ Nilai yang belum diketahui dianggap nol
- Hasil dari perhitungan digunakan untuk perhitungan selanjutnya.
- ❖Iterasi pertama
- ➤ Dengan menganggap bahwa y dan z adalah nol, maka x dapat dihitung:

$$x = \frac{7,85 + 0,1y + 0,2z}{3} = \frac{7,85}{3} = 2,61667$$



Nilai y ini dengan anggapan nilai z adalah nol dan x adalah hasil yang barus saja dididapat, kemudian disubtitusikan ke persamaan berikut :

$$y = \frac{-19,3 - 0,1x + 0,3z}{7} = \frac{-19,3 - 0,1(2,61667)}{7} = -2,7945$$

Nilai y dan nilai x , disubtitusikan untuk mencari nilai z

$$z = \frac{71,4-0,3x+0,2y}{10} = \frac{71,4-0,3(2,61667)+0,2(2,7945)}{10}$$
$$z = 7,0056$$



### ❖Iterasi ke-2

$$x = \frac{7,85 + 0,1y + 0,2z}{3} = \frac{7,85 + 0,1(-2,7945) + 0,2(7,0056)}{3}$$
$$= 2,99056$$

$$y = \frac{-19,3 - 0,1x + 0,3z}{7} = \frac{-19,3 - 0,1(2,99056) + 0,3(7,0056)}{7}$$
$$= -2,49962$$

$$z = \frac{71,4 - 0,3x + 0,2y}{10} = \frac{71,4 - 0,3(2,99056) + 0,2(-2,49962)}{10}$$
$$z = 7,00029$$



# ❖Iterasi ke-3

$$x = \frac{7,85 + 0,1y + 0,2z}{3} = \frac{7,85 + 0,1(-2,49963) + 0,2(7,0029)}{3}$$
$$= 3,00032$$

$$y = \frac{-19,3 - 0,1x + 0,3z}{7} = \frac{-19,3 - 0,1(3,00032) + 0,3(7,0029)}{7}$$
$$= -2,49999$$

$$z = \frac{71,4 - 0,3x + 0,2y}{10} = \frac{71,4 - 0,3(3,00032) + 0,2(-2,49999)}{10}$$
$$z = 6,99999$$



# ❖Iterasi ke-4

$$x = \frac{7,85 + 0,1y + 0,2z}{3} = \frac{7,85 + 0,1(-2,499999) + 0,2(6,99999)}{3}$$
$$= 3$$

$$y = \frac{-19,3 - 0,1x + 0,3z}{7} = \frac{-19,3 - 0,1(3) + 0,3(6,99999)}{7}$$
$$= -2,5$$

$$z = \frac{71,4-0,3x+0,2y}{10} = \frac{71,4-0,3(3)+0,2(-2,5)}{10}$$

$$z = 7$$



# Subtitusi Mundur dan Subtitusi Maju

Pandang SPL dengan matriks koefisisen berupa matriks segitiga atas berikut :

• Algoritma Subtitusi Mundur

$$x_n = b_n / a_{nn}$$
Untuk  $k = n - 1, ... 1$ 

$$b_k - \sum_{j=k+1}^n a_{kj} x_j$$

$$a_{kj}$$

Jika kita menyelesaikannya secara maju, algoritma yang berhubungan disebut subtitusi maju

**SP**L nya berbentuk

• Algoritma Subtitusi Maju

$$x_n = b_1 / a_{11}$$
  
Untuk  $k = 2, 3, ... n$ 

$$x_k = \frac{b_k - \sum_{j=1}^{k-1} a_{kj} - x_j}{a_{kk}}$$