BAB VI

INTERPOLASI

Pendahuluan

Bila diketahui tabulasi titik-titik (*x,y*) sebagai berikut (yang dalam hal ini rumus fungsi $y = f(x)$ tidak diketahui secara eksplisit):

x	$y = f(x)$
2.5	1.4256
3.0	1.7652
3.5	2.0005
4.4	2.8976
6.8	3.8765

Hitung taksiran nilai *y untuk* $x = 3.8$*!*

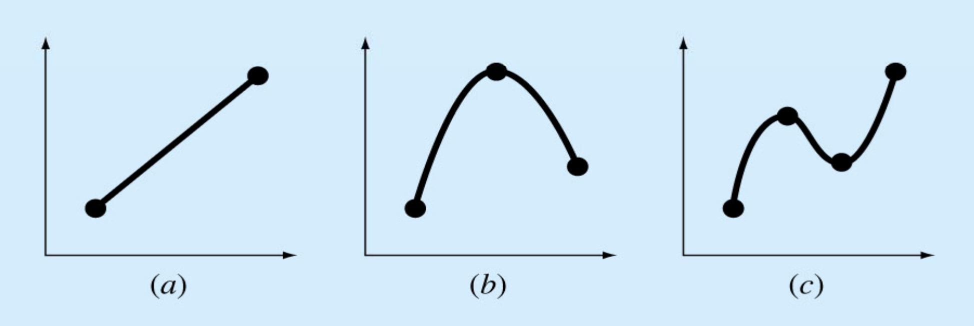
- Persoalan semacam ini acapkali muncul pada pengamatan fenomena alam, baik berupa eksperimen di laboratorium maupun penelitian di lapangan yang melibatkan beberapa parameter (misalnya suhu, tekanan, waktu, dan sebagainya).
- Pengamat tidak mengetahui relasi yang menghubungkan parameter-parameter itu. Pengamat hanya dapat mengukur nilai-nilai parameter tersebut dengan menggunakan alat ukur seperti sensor, termometer, barometer, dan sebagainya. Tidak satupun metode analitik yang yang tersedia untuk menyelesaikan persoalan jenis ini.

- Disinilah perlunya sebuah metode Numerik untuk mencari solusi dari permasalahan tersebut

Interpolasi

- Andaikan kita memiliki tabulasi data dan ingin menaksir harga yang terletak di antara titik-titik data dalam tabel. Metode yang digunakan untuk maksud tersebut adalah interpolasi.

- Untuk (n+1) titik data, ada 1 dan hanya 1 polinom (fungsi) yang melewati semua titik data (derajat polinom n atau kurang dari n).



Dua titik data : Garis
Tiga titik data : Kuadratik
Empat titik data : Polinomial tingkat-3
…
n titik data : Polinomial tingkat-n

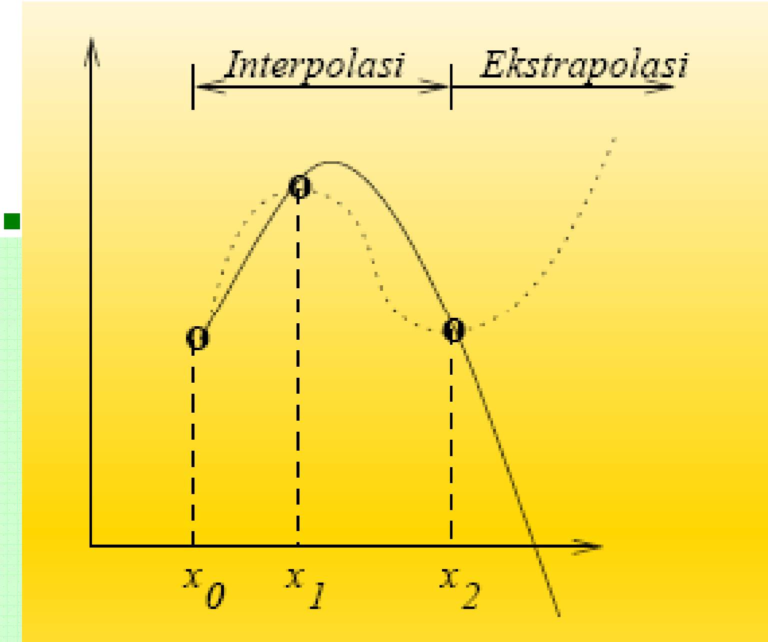
Interpolasi berbeda dengan ekstrapolasi, di mana yang kedua digunakan untuk menaksir harga(-harga) *di luar interval titik-titik data* dalam tabel.

Diketahui : n titik data $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots (x_n, y_n)$

Ditanya : $a_0, a_1, \ldots, a_n$ sehingga

$$x_1 a_1 + x_1^2 a_2 + \ldots + x_1^n a_n = y_1 - a_0$$
$$x_2 a_1 + x_2^2 a_2 + \ldots + x_2^n a_n = y_2 - a_0$$
$$\ldots$$
$$x_n a_1 + x_n^2 a_2 + \ldots + x_n^n a_n = y_n - a_0$$

$$\longrightarrow f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$$



- Meskipun ada 1 dan hanya 1 polinom derajat n (atau kurang dari n) yang mencocokkan (n + 1) data, *format polinom/fungsi* dapat dinyatakan dalam berbagai cara.

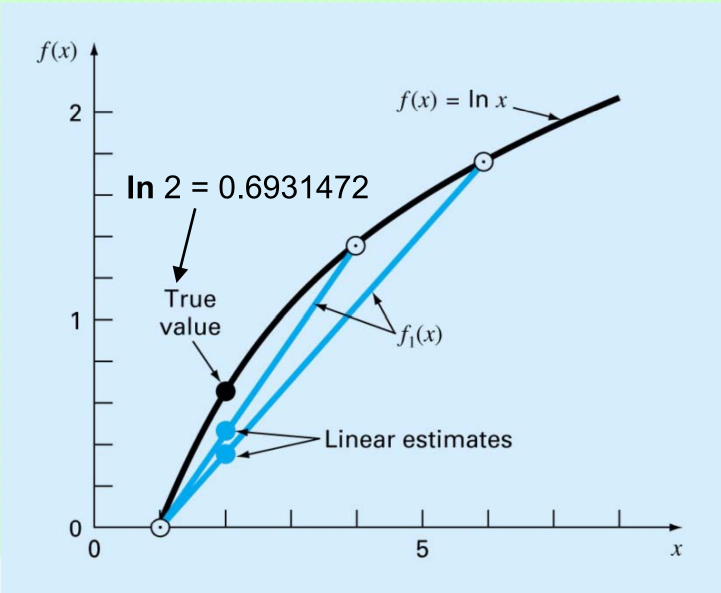
- Dua alternatif yang format yang akan dipelajari adalah **polinom Newton** dan **polinom Lagrange**.

Interpolasi Linear/Garis/derajat 1

Diketahui : Dua titik (x_1, y_1), (x_2, y_2)

Ditanya :Garis yang melewati 2 titik tersebut

$$f_I(x) = f(x_0) + \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x - x_0)$$



Contoh: $f(x) = \ln x$

$x_1 = 1$ dan $x_2 = 6$:

$f_1(2) = 0.3583519$

$x_1 = 1$ dan $x_2 = 4$

$f_1(2) = 0.4620981$

Semakin kecil intervalnya semakin baik hasil interpolasi!

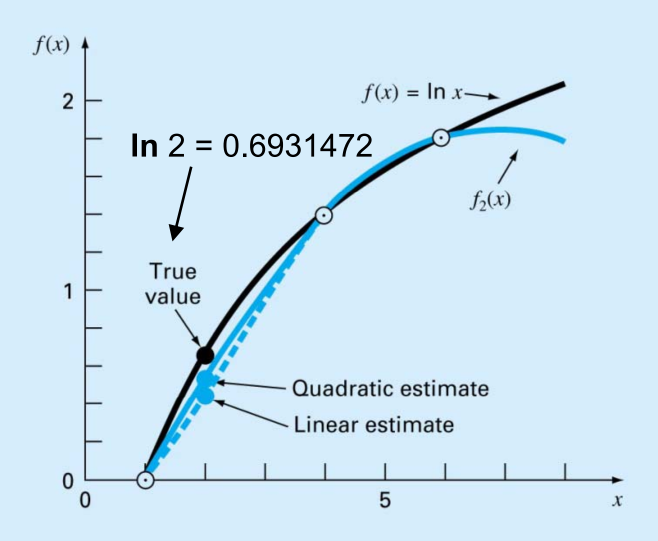
Interpolasi Kuadratis

Diketahui : Tiga titik (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3,y_3)

Ditanya : kuadratis $f_2(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$ yang melewati ke-3 titik diatas

$$f_{II}(x) = b_0 + b_1(x - x_0) + b_2(x - x_0)(x - x_1)$$

$$b_0 = f(x_0) \qquad b_1 = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \qquad b_2 = \frac{\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} - \dfrac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}}{x_2 - x_0}$$



Contoh: $f(x) = \ln x$

Titik data: (1, 0), (4, 1.386294), (6, 1.791759)

$b_0 = 0$

$b_1 = (1.386294 - 0)/(4 - 1) = 0.4620981$

$b_2 = [(1.791759 - 1.386294)/(6-4) - 0.4620981]/(6-1) = -0.0518731$

$f_2(2) = 0.5658444$

Interpolasi Polynomial Newton

- Diketahui: n titik (x_1, y_1), (x_2, y_2), …, (x_n, y_n) ($yi = f(x_i)$, i=1,2,…,n)
- Ditanya: $f_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n$ yang melewati n titik tersebut.

$$f_n(x) = b_0 + b_1(x - x_0) + b_2(x - x_0)(x - x_1) + \ldots + b_n(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{n-1})$$

$$\begin{aligned} b_0 &= f(x_0) \\ b_1 &= f[x_1, x_0] \\ &\vdots \\ b_n &= f[x_n, x_{n-1}, \cdots x_1, x_0] \end{aligned}$$

dengan

$$f[x_i, x_j] = \frac{f(x_i) - f(x_j)}{x_i - x_j}$$

$$f[x_i, x_j, x_k] = \frac{f[x_i, x_j] - f[x_j, x_k]}{x_i - x_k}$$

$$f[x_n, x_{n-1}, \ldots, x_1, x_0] = \frac{f[x_n, x_{n-1}, \ldots, x_1] - f[x_{n-1}, x_{n-2}, \ldots, x_0]}{x_n - x_0}$$

Contoh Interpolasi Polynomial Newton

Diketahui: (1, 0), (4, 1.386294), (6, 1.791759), (5, 1.609438) (dari fungsi ***ln*** *x*)

Ditanya: Perkirakan ***ln*** 2 dengan interpolasi Newton orde ke-3

$$f_n(x) = b_0 + b_1(x - x_0) + b_2(x - x_0)(x - x_1) + b_2(x - x_0)(x - x_1) + b_3(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)$$

i	x_i	$f(x_i)$	First	Second	Third
0	x_0	$f(x_0)$	$f[x_1, x_0]$	$f[x_2, x_1, x_0]$	$f[x_3, x_2, x_1, x_0]$
1	x_1	$f(x_1)$	$f[x_2, x_1]$	$f[x_3, x_2, x_1]$	
2	x_2	$f(x_2)$	$f[x_3, x_2]$		
3	x_3	$f(x_3)$			

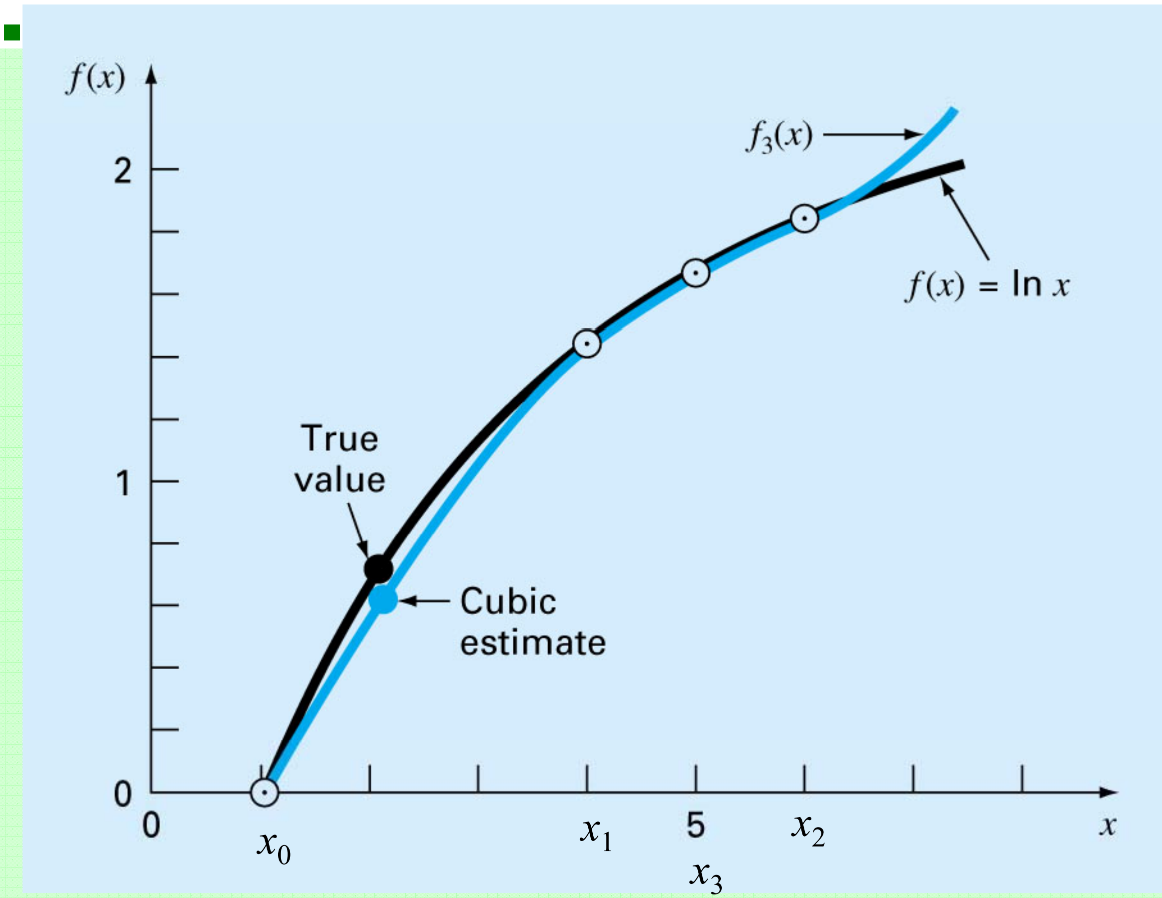
$$f[x_1, x_0] = \frac{1.386294 - 0}{4 - 1} = 0.462 \qquad f[x_2, x_1] = \frac{1.791759 - 1.386294}{6 - 4} = 0.203 \qquad f[x_3, x_2] = \frac{1.609438 - 1.791759}{5 - 6} = 0.182$$

$$f[x_2, x_1, x_0] = \frac{0.203 - 0.462}{6 - 1} = -0.052 \qquad f[x_3, x_2, x_1] = \frac{0.182 - 0.203}{5 - 4} = -0.020$$

$$f[x_3, x_2, x_1, x_0] = \frac{-0.020 - (-0.052)}{5 - 1} = 0.008$$

$$f_3(2) = 0.629$$

Contoh Interpolasi Polynomial Newton



Perkiraan Error Polynomial Newton

$$f_n(x) = b_0 + b_1(x - x_0) + b_2(x - x_0)(x - x_1) + \ldots + b_n(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{n-1})$$

Jika $f(x)$ dinyatakan oleh deret Taylor , error setelah terms ke-n adalah:

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x_{i+1} - x_i)^{n+1}$$

Untuk suatui polinomial Newton orde ke-n, Hubungan untuk error scr analogi:

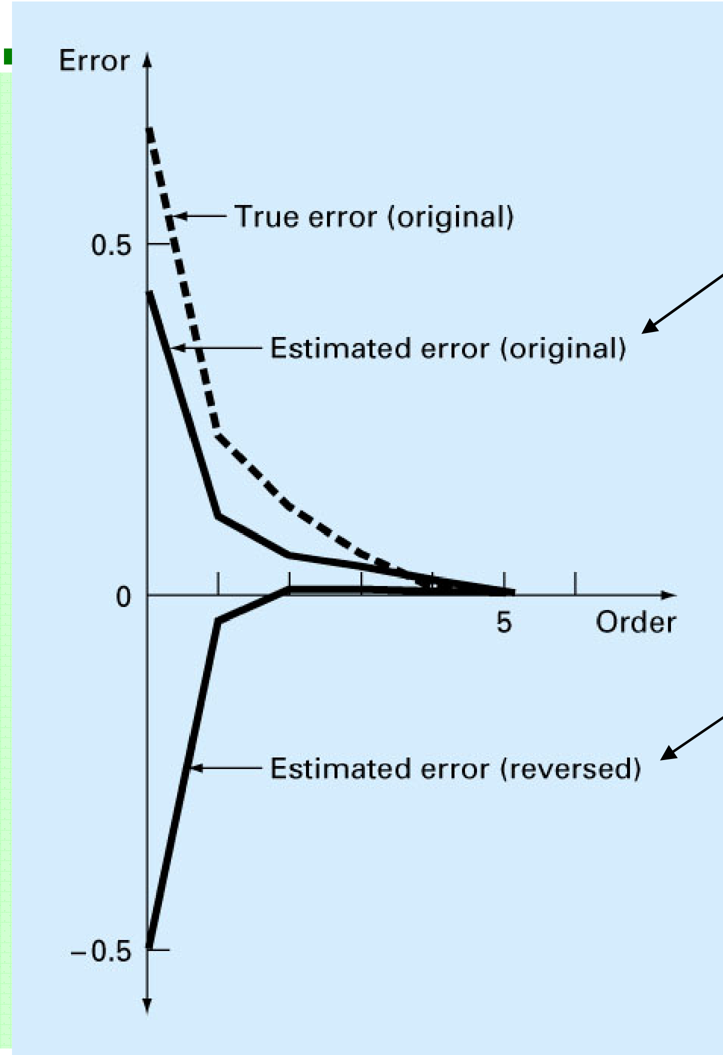
$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)\cdots(x - x_n)$$

Tapi kita tidak tahu apakah itu $f(x)$! Sebagai suatu perkiraan untuk error, bisa kita gunakan

$$R_n \cong f[x_{n+1}, x_n, x_{n-1}, \cdots, x_0](x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)\cdots(x - x_n)$$

(Ingat: $f_{n+1}(x) = f_n(x) + R_n$)

Perkiraan Error, Orde, dan Titik data



x	$f(x) = \boldsymbol{ln}\ x$
1	0
4	1.386
6	1.792
5	1.609
3	1.099
1.5	0.405
2.5	0.916
3.5	1.253

x	$f(x) = \boldsymbol{ln}\ x$
3.5	1.253
2.5	0.916
1.5	0.405
3	1.099
5	1.609
6	1.792
4	1.386
1	0

Perkiraan Error polynomial Newton $f_k(x)$ pada ***ln*** 2: $k = 1,2,\ldots,7$

Interpolasi Lagrange

- Interpolasi Lagrange diterapkan untuk mendapatkan fungsi polinomial P(x) berderajat tertentu yang melewati sejumlah titik data. Misalnya, kita ingin mendapatkan fungsi polinomial berderajat satu yang melewati dua buah titik yaitu (x_0, y_0) dan (x_1, y_1).

- Langkah pertama yang kita lakukan adalah mendefinisikan fungsi linier berikut

$$P_1(x) = y_0 l_0(x) + y_1 l_1(x)$$

$$\longrightarrow \quad l_0(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} \qquad l_1(x) = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}$$

- Misalkan diberikan n + 1 titik data (x_0 , y_0) dan (x_1 , y_1) , . . . , (x_n , y_n) , dengan semua titik berbeda. Interpolasi polinom lagrange dari data di atas diberikan oleh :

$$P_n(x_j) = y_0 l_0(x_j) + y_1 l_1(x_j) + y_2 l_2(x_j) \ldots + y_n l_n(x_j)$$

di mana

$$l_i(x) = \frac{(x - x_0)\cdots(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})\cdots(x - x_n)}{(x_i - x_1)\cdots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\cdots(x_i - x_n)}$$

- Misalkan diberikan titik-titik data sebagai berikut

x	1	2	4	8
$f(x)$	1	3	7	11

- Carilah $f\,(7)$ dengan polinom interpolasi lagrange.
- Jawab :

Karena tersedia 4 titik data maka polinom yang bersesuaian adalah polinom orde 3.

$P_3(x) = y_0\, l_0(x) + y_1\, l_1(x) + y_2\, l_2(x) + y_3\, l_3(x)$

$$l_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)} \qquad l_0(7) = \frac{(7-2)(7-4)(7-8)}{(1-2)(1-4)(1-8)} = 0{,}71429$$

$$l_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)} \qquad l_1(7) = \frac{(7-1)(7-4)(7-8)}{(2-1)(2-4)(2-8)} = -1{,}5$$

$$l_2(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_3)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)}$$

$$l_2(7) = \frac{(7-1)(7-2)(7-8)}{(4-1)(4-2)(1-8)} = 1{,}25$$

$$l_3(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)}{(x_3 - x_0)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)}$$

$$l_3(7) = \frac{(7-1)(7-2)(7-8)}{(8-1)(8-2)(8-4)} = 0{,}53571$$