

# Logika Fuzzy

## Teori Dasar

# Crisp Logic

- *Crisp logic is concerned with absolutes-true or false, there is no in-between.*
- **Contoh:**

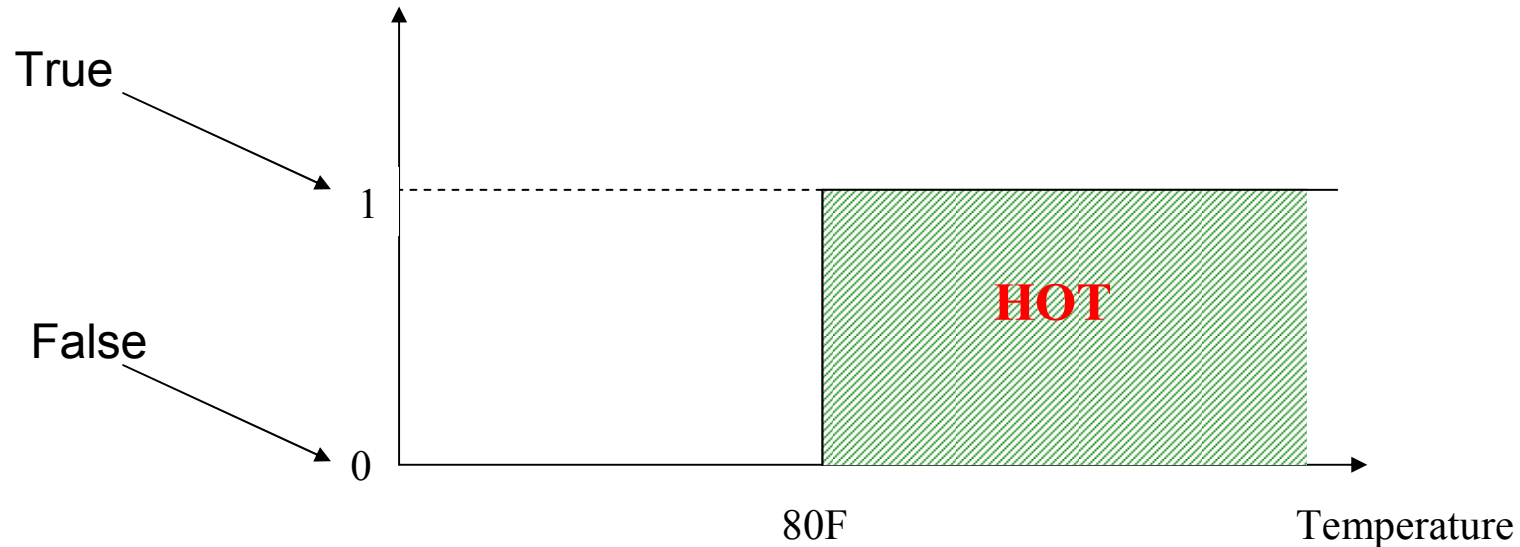
Rule:

If the temperature is higher than 80F, it is hot;  
otherwise, it is not hot.

Kasus:

- Temperature = 100F      **Hot**
- Temperature = 80.1F      **Hot**
- Temperature = 79.9F      **Not hot**
- Temperature = 50F      **Not hot**

# Fungsi Keanggotaan untuk *crisp logic*



If temperature  $\geq 80F$ , it is hot (1 or true);

If temperature  $< 80F$ , it is not hot (0 or false).

- Fungsi keanggotaan dari crisp logic gagal membedakan antar member pada himpunan yang sama
- Ada problem-problem yang terlalu kompleks untuk didefinisikan secara tepat

# Bahasa Alami

- Conton:
  - Budi tinggi -- apa yg dimaksud tinggi?
  - Budi sangat tinggi -- apa bedanya dengan tinggi?
- Bahasa alami tidak mudah ditranslasikan ke nilai absolut 0 and 1.

# Fuzzy Logic

- Logical system yang mengikuti cara penalaran manusia yang cenderung menggunakan 'pendekatan' dan bukan 'eksak'

Sebuah pendekatan terhadap ketidakpastian yang mengkombinasikan nilai real  $[0...1]$  dan operasi logika

Keuntungan Fuzzy:

- Mudah dimengerti
- Pemodelan matematik sederhana
- Toleransi data-data yang tidak tepat
- Dapat memodelkan fungsi-fungsi non liner yang kompleks
- Mengaplikasikan pengalaman tanpa proses pelatihan
- Didasarkan pada bahasa alami

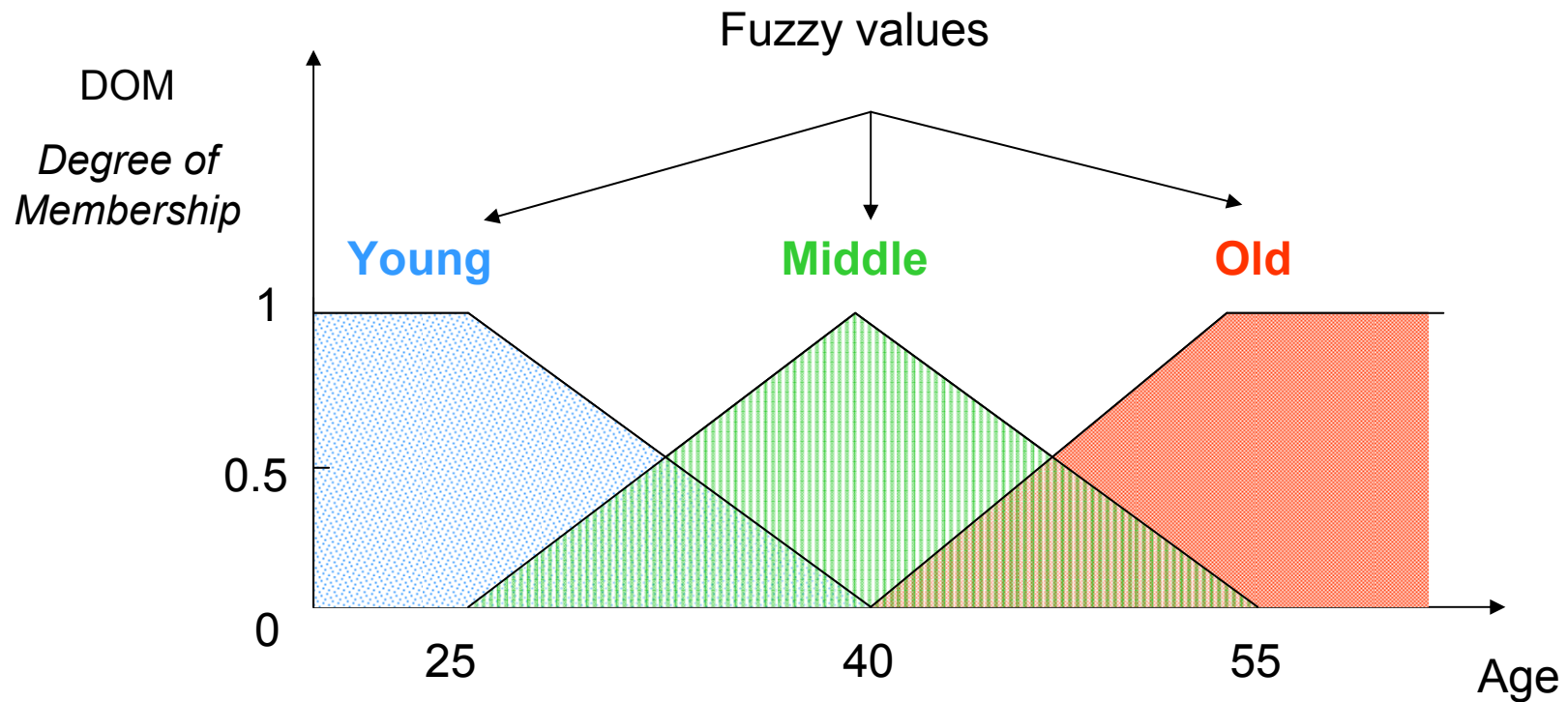
# Fuzzy vs Probabilitas

- Fuzzy  $\neq$  Probabilitas
- - Probabilitas berkaitan dengan ketidakmenentuan dan kemungkinan
  - Logika Fuzzy berkaitan dengan ambiguitas dan ketidakjelasan
- Contoh 1:  
Billy memiliki 10 jari kaki. Probabilitas Billy memiliki 9 jari kaki adalah 0. Keanggotaan Fuzzy Billy pada himpunan orang dengan 9 jari kaki  $\neq 0$
- Contoh 2:
  - Probabilitas botol 1 berisi air beracun adalah 0.5 dan 0.5 untuk isi air murni { **mungkin air tersebut tidak beracun** }
  - Isi botol 2 memiliki nilai keanggotaan 0.5 pada himpunan air berisi racun { **air pasti beracun** }

# Contoh: “Muda”

- Contoh:
  - Ann 28 tahun, 0.8 pd himp “Muda”
  - Bob 35 tahun, 0.1 pd himp “Muda”
  - Charlie 23 tahun, 1.0 pd himp “Muda”
- Tidak seperti statistik dan probabilitas, derajat tidak menggambarkan *probabilitas* objek tersebut pada himpunan, tetapi menggambarkan *taraf/tingkat* keanggotaan objek pada himpunan

# Fungsi Keanggotaan Logika Fuzzy



Nilai Fuzzy berasosiasi dengan derajat keanggotaan pada himpunan

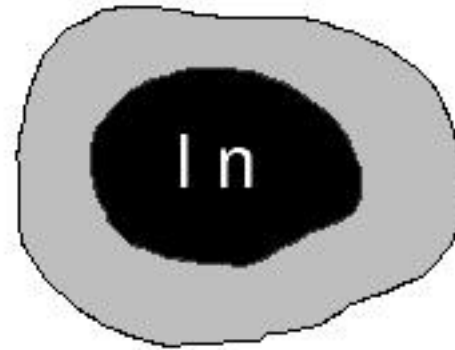


# Crisp set vs. Fuzzy set



Out

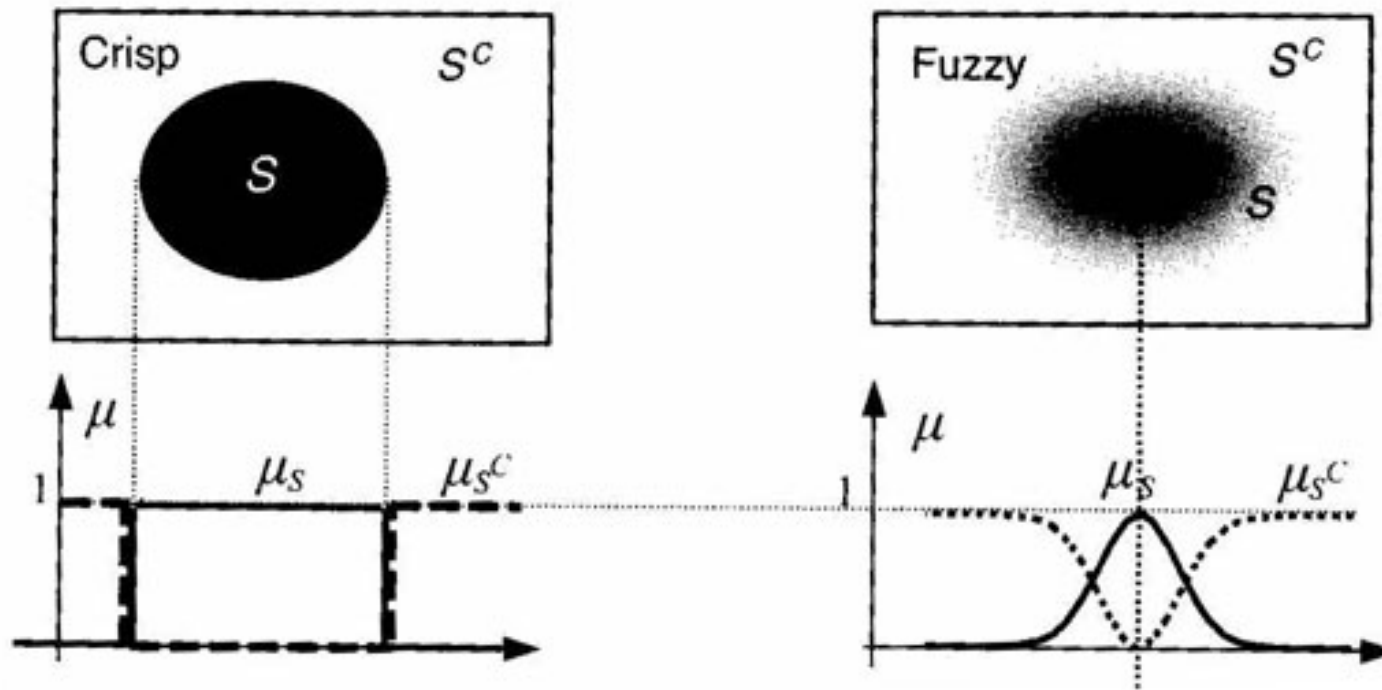
A traditional crisp set



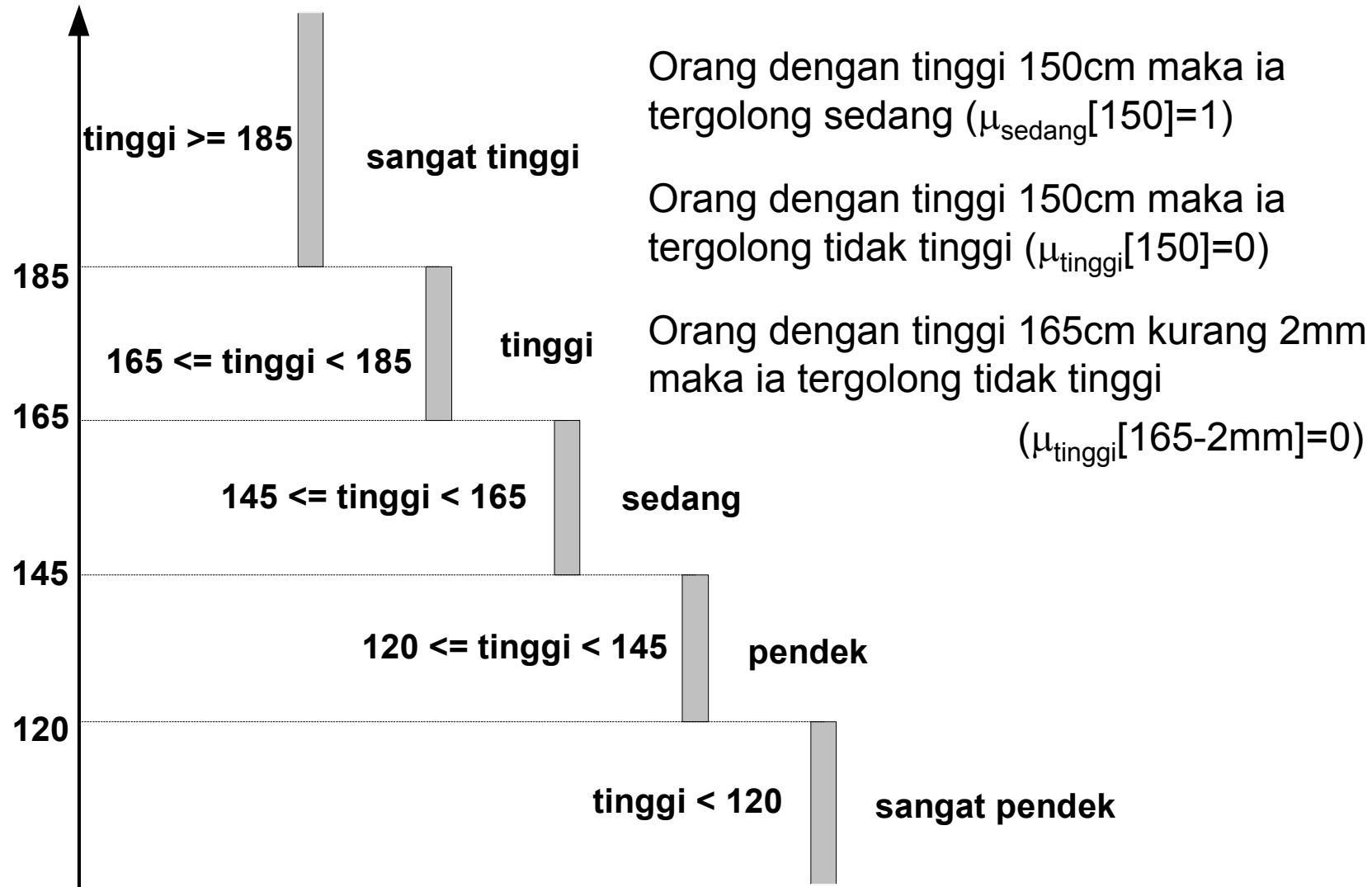
Out

A fuzzy set

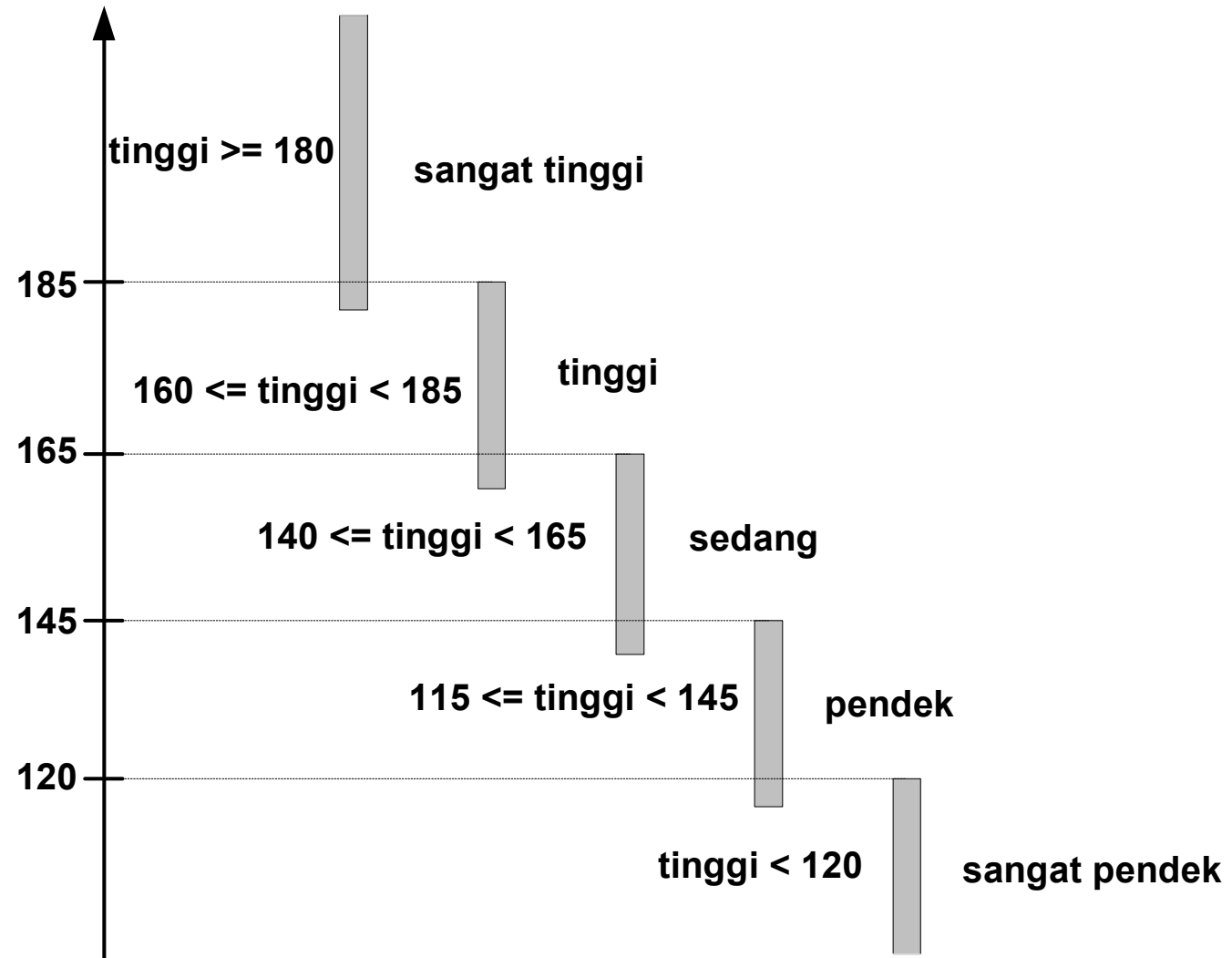
# Crisp set vs. Fuzzy set



# Contoh: Crisp Set



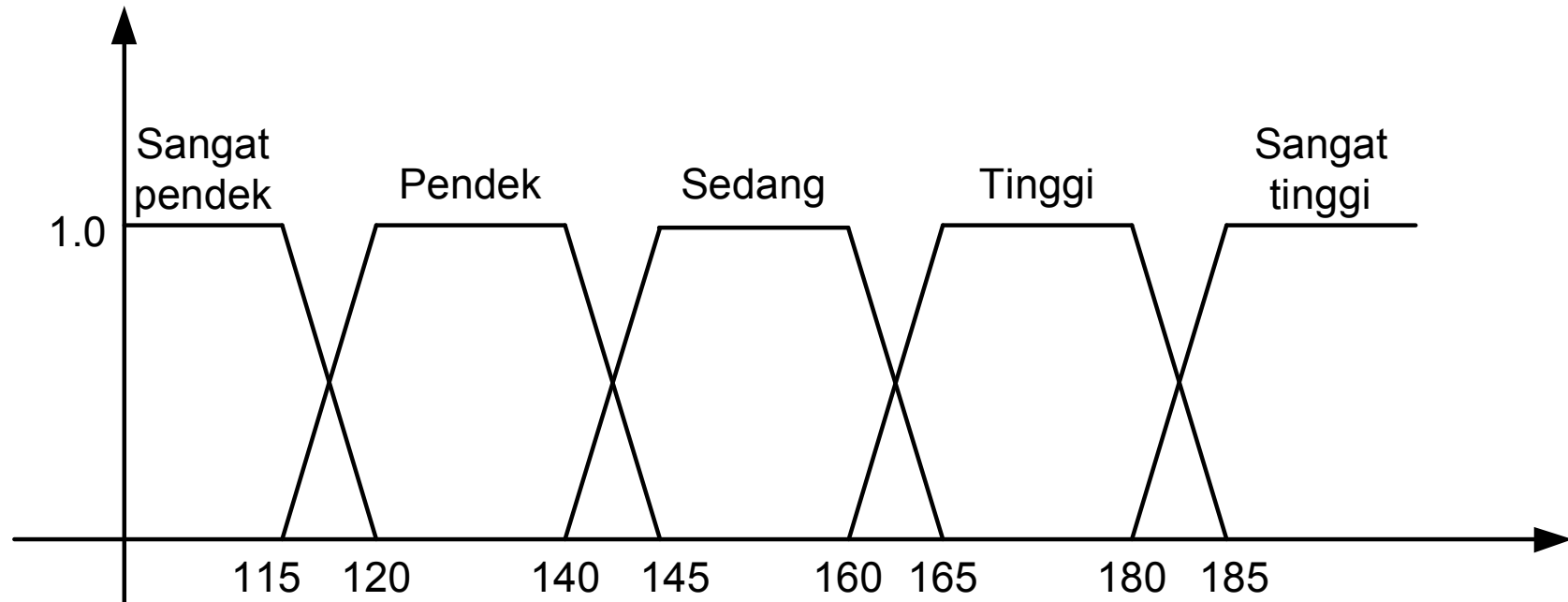
# Contoh: Himpunan Fuzzy



# Istilah-Istilah

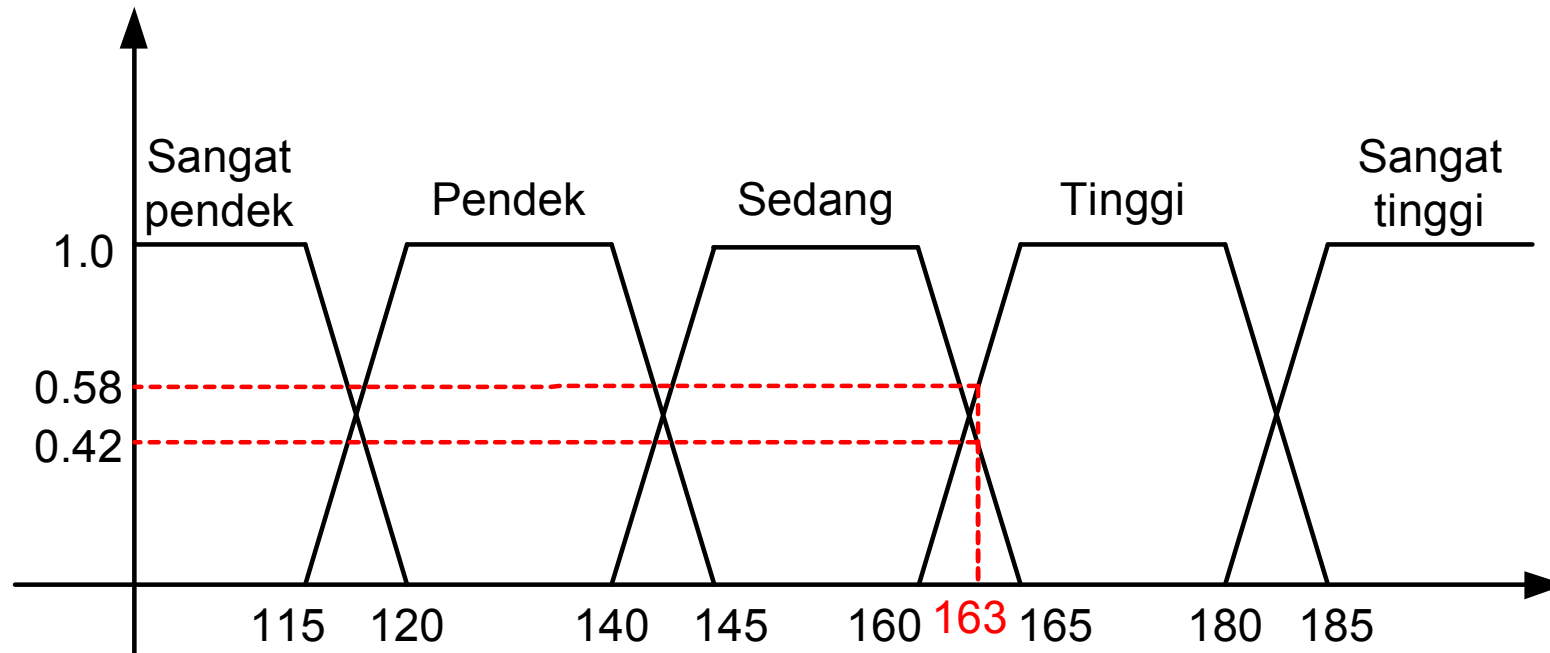
- **Fuzzification:** definisi dari himpunan fuzzy dan penentuan derajat keanggotaan dari *crisp input* pada sebuah himpunan fuzzy
- **Inferensi:** evaluasi kaidah/aturan/rule fuzzy untuk menghasilkan output dari tiap rule
- **Composisi:** agregasi atau kombinasi dari keluaran semua rule
- **Defuzzification:** perhitungan *crisp output*

# Fuzzyfication (1)



$$\mu = [\mu_{sp}, \mu_p, \mu_s, \mu_t, \mu_{st}]$$

## Fuzzyfication (2)



$$\mu[163] = [0, 0, 0.42, 0.58, 0]$$

atau

$$\mu_{\text{sedang}}[163] = 0.42, \mu_{\text{tinggi}}[163] = 0.58$$

# Membership Function Himpunan Fuzzy

- **Variabel Fuzzy**

Variabel dalam suatu sistem fuzzy. Contoh : berat badan, tinggi badan, dsb

- **Himpunan Fuzzy (Fuzzy set)**

Himpunan fuzzy yang mewakili suatu kondisi pada suatu variabel fuzzy.

Contoh :

- Variabel suhu terbagi menjadi 3 himpunan fuzzy, yaitu : panas, hangat, dingin.
- Variabel nilai terbagi menjadi : tinggi, sedang, rendah

- Himpunan fuzzy memiliki 2 atribut, yaitu :

- **Linguistik**, yaitu penamaan suatu group yang mewakili suatu kondisi, misalnya panas, hangat, dingin
- **Numeris**, yaitu ukuran dari suatu variabel seperti : 17,19, 21, 33, dst

- **Himpunan Semesta**

keseluruhan nilai yang boleh dioperasikan dalam suatu variabel fuzzy.

Contoh:

- Semesta untuk variabel berat badan : [1, 150]
- Semesta untuk variabel suhu : [0,100].

- **Domain**

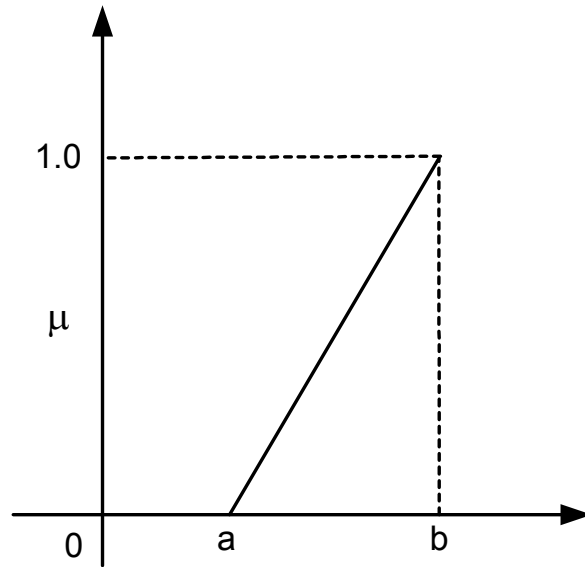
Domain himpunan fuzzy adalah keseluruhan nilai yang diijinkan dalam Semesta dan boleh dioperasikan dalam suatu himpunan fuzzy.

Contoh :

- DINGIN = [0,60]
- HANGAT = [50,80]
- PANAS = [80, +∞)

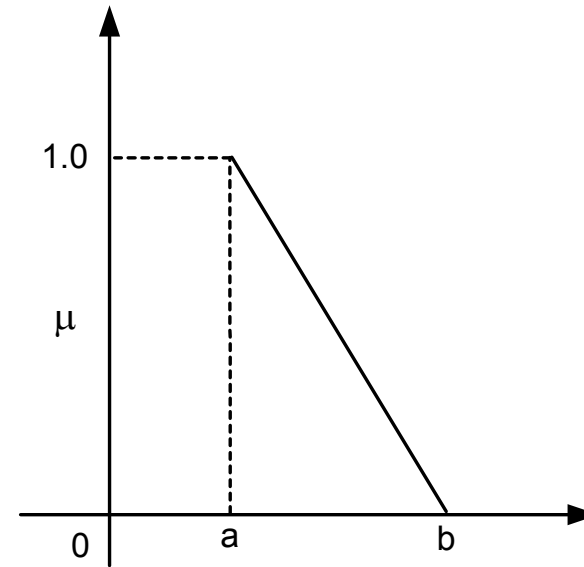


# Fungsi Keanggotaan: Fungsi Linier



Linier Naik

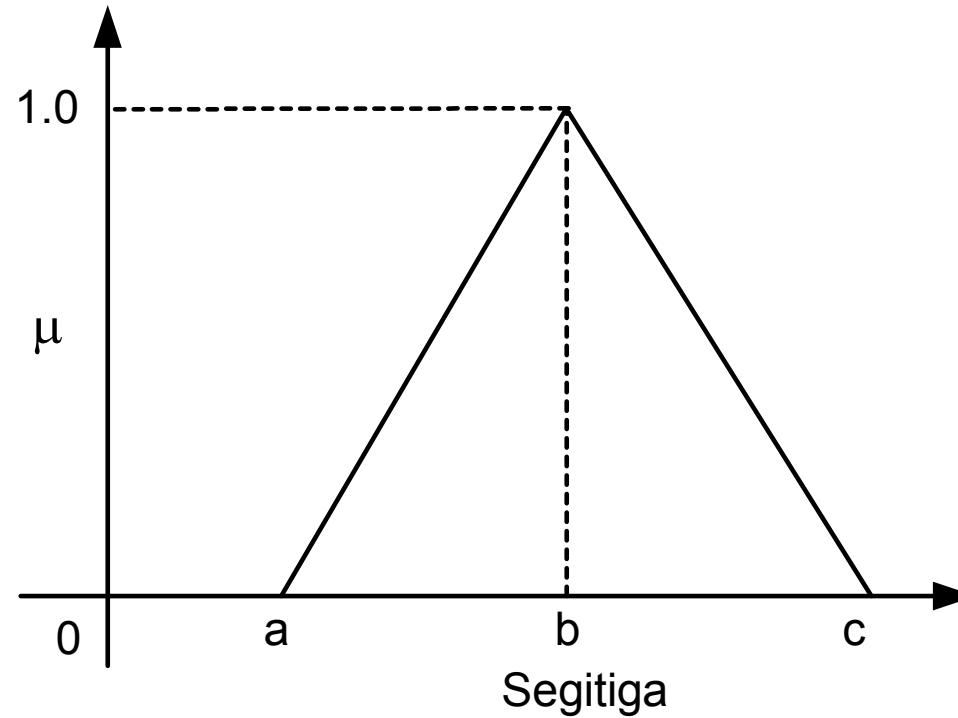
$$\mu[x] = \begin{cases} 0; & x \leq a \\ (x-a)/(b-a); & a < x \leq b \\ 1; & x > b \end{cases}$$



Linier Turun

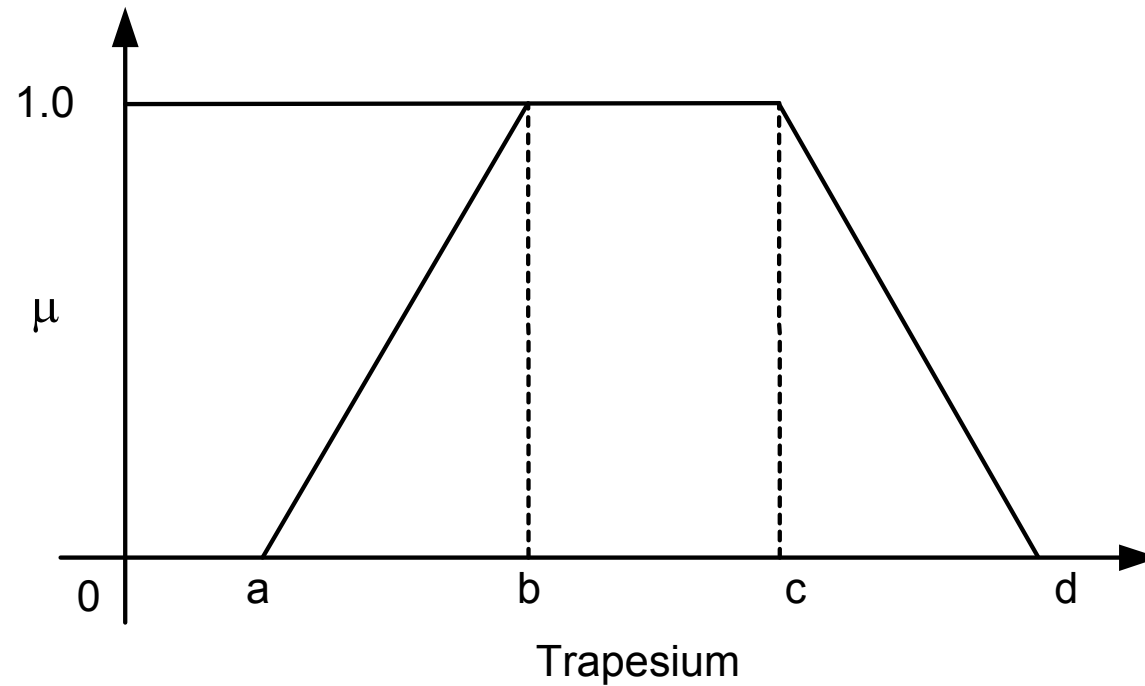
$$\mu[x] = \begin{cases} (b-x)/(b-a); & a \leq x < b \\ 0; & x \geq b \end{cases}$$

# Fungsi Keanggotaan: Segitiga



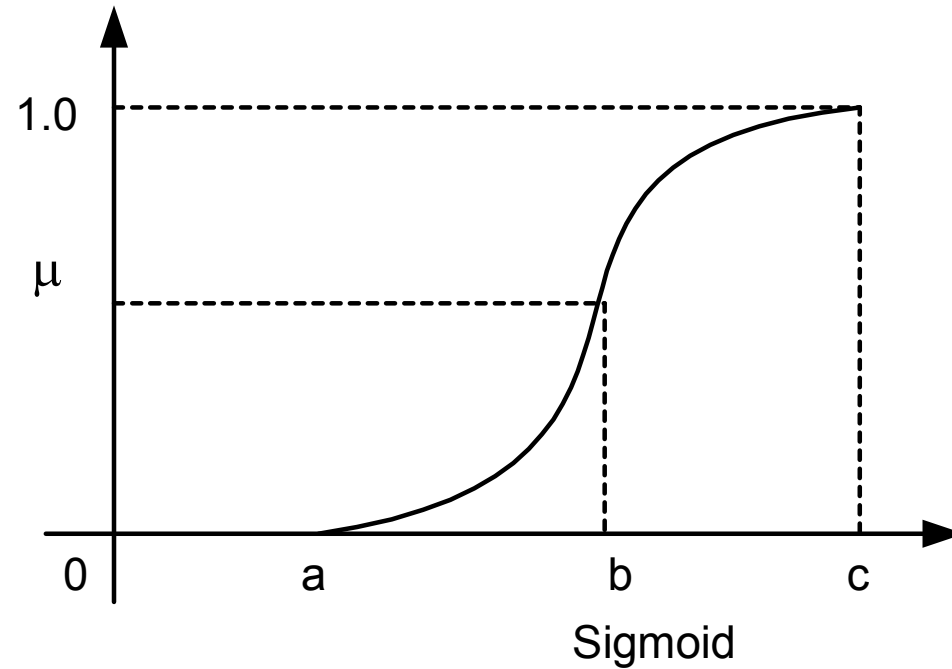
$$\begin{aligned}\mu[x] &= 0; & x \leq a \text{ atau } x \geq c \\ &= \frac{x-a}{b-a}; & a < x \leq b \\ &= \frac{c-x}{c-b}; & b < x < c\end{aligned}$$

# Fungsi Keanggotaan: Trapesium



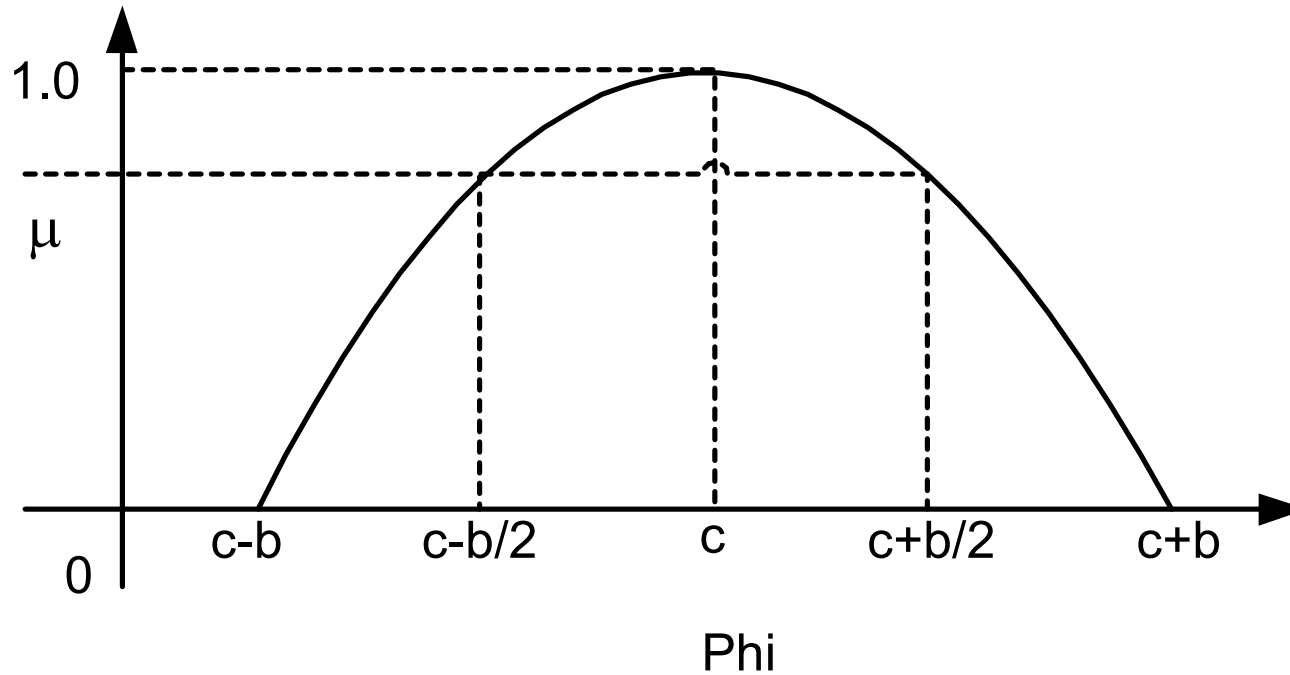
$$\begin{aligned}\mu[x] = & 0; \quad x \leq a \text{ atau } x \geq d \\ & (x-a)/(b-a); \quad a < x \leq b \\ & 1; \quad b < x \leq c \\ & (d-x)/(d-c); \quad c < x < d\end{aligned}$$

# Fungsi Keanggotaan: Sigmoid



$$\mu[x;a,b,c]_{\text{sigmoid}} = \begin{cases} 0; & x \leq a \\ 2 \left( \frac{x-a}{c-a} \right)^2; & a < x \leq b \\ 1 - 2 \left( \frac{c-x}{c-a} \right)^2; & b < x < c \\ 1; & x \geq c \end{cases}$$

# Fungsi Keanggotaan: Phi



$$\mu[x;a,b,c]_{\text{phi}} = \mu[x;c-b,c-b/2,c]_{\text{sigmoid}}; \quad x \leq c$$

$$\mu[x;c,c+b/2,c+b]_{\text{sigmoid}}; \quad x > c$$

## Operasi Fuzzy

# OR (Union) – AND (Intersection)

- Fuzzy union ( $\cup$ ): union dari 2 himpunan adalah maksimum dari tiap pasang elemen element pada kedua himpunan
- Contoh:
  - $A = \{1.0, 0.20, 0.75\}$
  - $B = \{0.2, 0.45, 0.50\}$
  - $A \cup B = \{\text{MAX}(1.0, 0.2), \text{MAX}(0.20, 0.45), \text{MAX}(0.75, 0.50)\}$   
 $= \{1.0, 0.45, 0.75\}$
- Fuzzy intersection ( $\cap$ ): irisan dari 2 himpunan fuzzy adalah minimum dari tiap pasang elemen pada kedua himpunan.
- contoh.
  - $A \cap B = \{\text{MIN}(1.0, 0.2), \text{MIN}(0.20, 0.45), \text{MIN}(0.75, 0.50)\} = \{0.2, 0.20, 0.50\}$

# Complement

- Komplemen dari variabel fuzzy dengan derajat keanggotaan= $x$  adalah  $(1-x)$ .
- Komplemen ( $_c$ ): komplemen dari himpunan fuzzy terdiri dari semua komplemen elemen.
- Contoh
  - $A^c = \{1 - 1.0, 1 - 0.2, 1 - 0.75\} = \{0.0, 0.8, 0.25\}$

# Contoh

Nilai keanggotaan sebagai hasil dari operasi 2 himpunan: fire strength atau  $\alpha$ -predikat

AND

$$\mu_{A \cap B} [x] = \min(\mu_A[x], \mu_B[x])$$

Misalkan nilai keanggotaan IP 3.2 pada himpunan **IPtinggi** adalah 0.7 dan nilai keanggotaan 8 semester pada himpunan **LulusCepat** adalah 0.8 maka  $\alpha$ -predikat untuk IPtinggi **dan** LulusCepat:

$$\begin{aligned}\mu_{\text{IPtinggi} \cap \text{LulusCepat}} &= \min(\mu_{\text{IPtinggi}}[3.2], \mu_{\text{LulusCepat}}[8]) \\ &= \min(0.7, 0.8) = 0.7\end{aligned}$$

OR

$$\mu_{A \cup B} [x] = \max(\mu_A[x], \mu_B[x])$$

$\alpha$ -predikat untuk IPtinggi **atau** LulusCepat:

$$\begin{aligned}\mu_{\text{IPtinggi} \cup \text{LulusCepat}} &= \max(\mu_{\text{IPtinggi}}[3.2], \mu_{\text{LulusCepat}}[8]) \\ &= \max(0.7, 0.8) = 0.8\end{aligned}$$

NOT (Complement)

$$\mu_A' [x] = 1 - \mu_A[x]$$

$\alpha$ -predikat untuk **BUKAN IPtinggi** :

$$\mu_{\text{IPtinggi}'} = 1 - \mu_{\text{IPtinggi}}[3.2] = 1 - 0.7 = 0.3$$



# Fuzzy Expert Systems

- **Pengantar**
- **Model Fuzzy Mamdani**
- **Model Fuzzy Sugeno**
- **Model Fuzzy Tsukamoto**

# Pengantar

Operasi dari sistem pakar fuzzy tergantung dari eksekusi 4 fungsi utama:

- Fuzzifikasi dari variabel input
- Inferensi / evaluasi rules
- Komposisi / agregasi
- Defuzzifikasi

# Istilah-Istilah

- **Fuzzification:** definisi dari himpunan fuzzy dan penentuan derajat keanggotaan dari *crisp input* pada sebuah himpunan fuzzy
- **Inferensi:** evaluasi kaidah/aturan/rule fuzzy untuk menghasilkan output dari tiap rule
- **Composisi:** agregasi atau kombinasi dari keluaran semua rule
- **Defuzzification:** perhitungan *crisp output*

# Model Fuzzy Mamdani

**Contoh:** persoalan sederhana dengan 2 input, 1 output dan 3 rules

**Rule: 1**

**IF**  $x$  is A3

**OR**  $y$  is B1

**THEN**  $z$  is C1

**Rule: 2**

**IF**  $x$  is A2

**AND**  $y$  is B2

**THEN**  $z$  is C2

**Rule: 3**

**IF**  $x$  is A1

**THEN**  $z$  is C3

**Rule: 1**

**IF** project\_funding is adequate

**OR** project\_staffing is small

**THEN** risk is low

**Rule: 2**

**IF** project\_funding is marginal

**AND** project\_staffing is large

**THEN** risk is normal

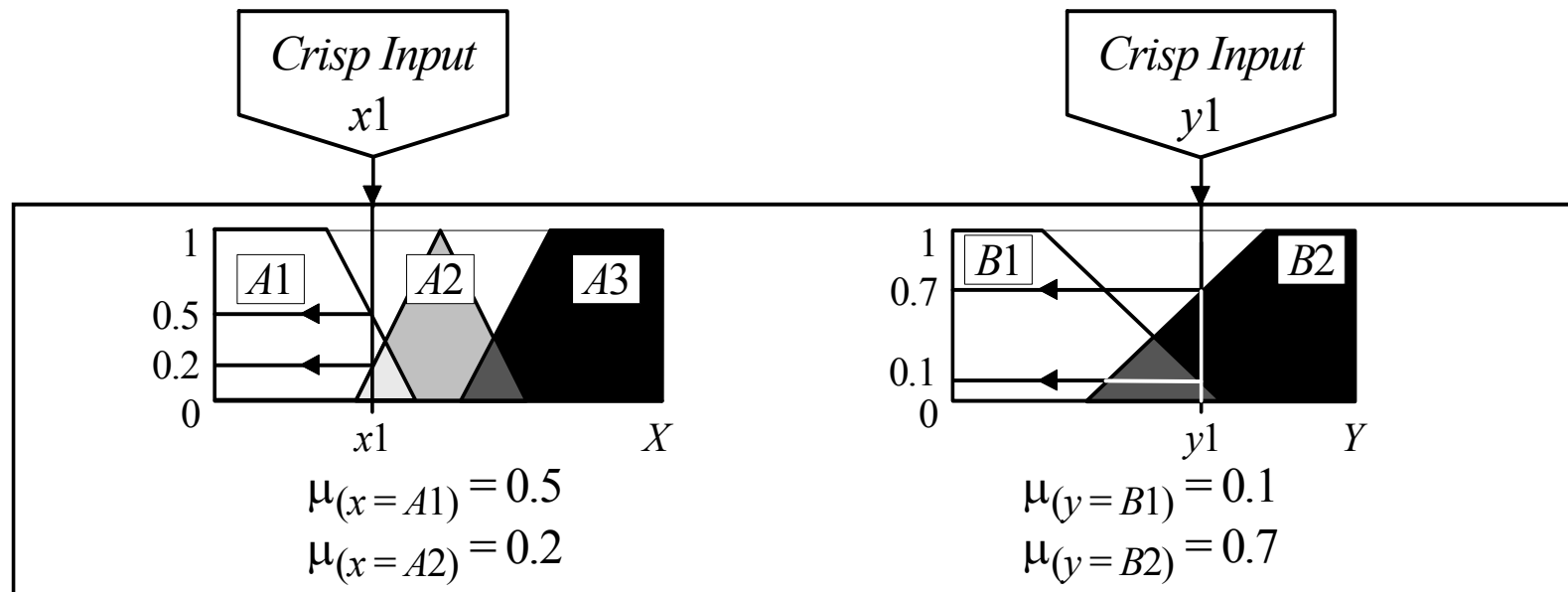
**Rule: 3**

**IF** project\_funding is inadequate

**THEN** risk is high

# Mamdani fuzzy inference

**Fuzzifikasi:** menentukan derajat keanggotaan input  $x1$  dan  $y1$  pada himpunan fuzzy



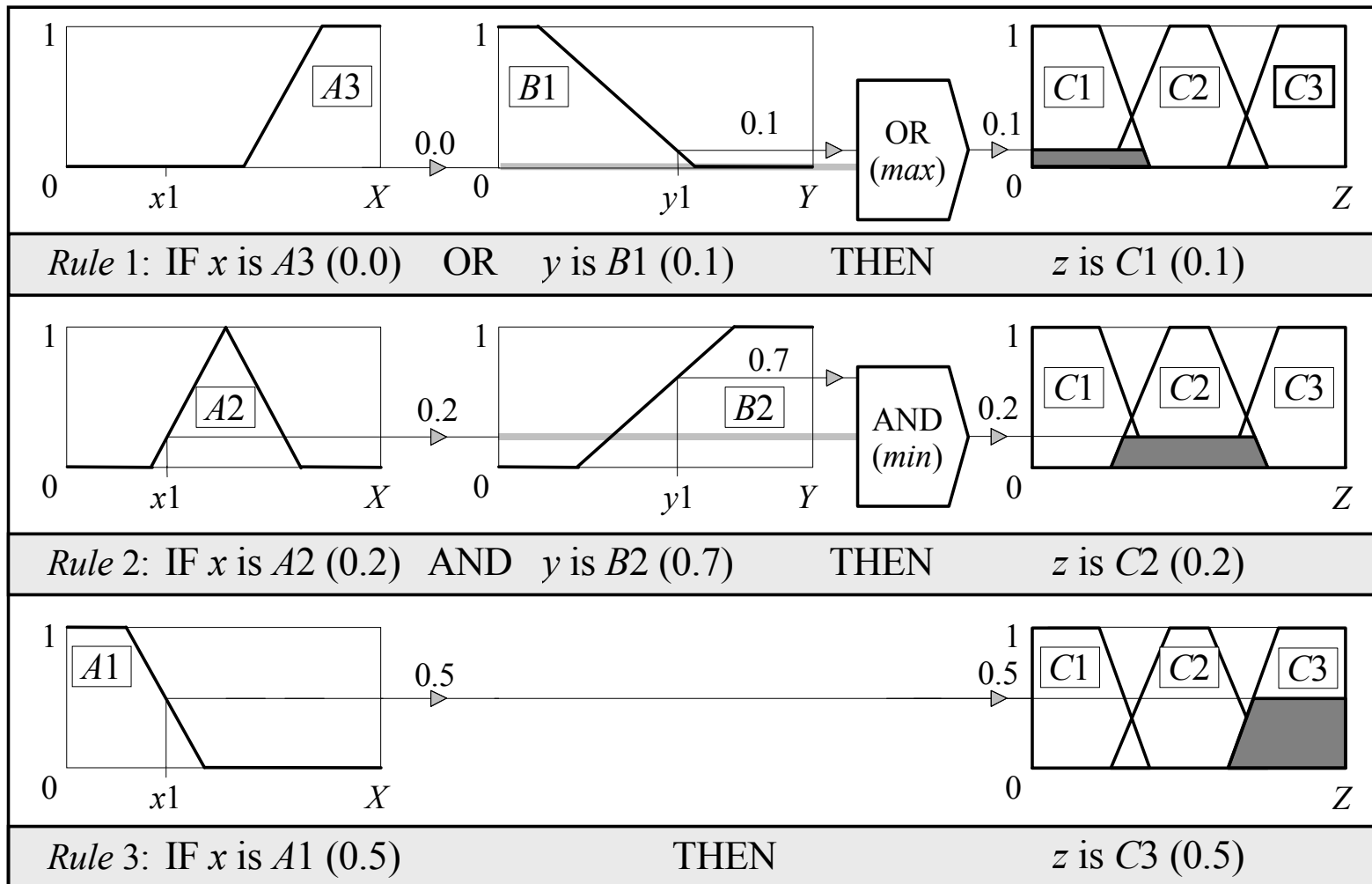
# Model Fuzzy Mamdani

**Inferensi:** aplikasikan fuzzified inputs,  $\mu(x=A1) = 0.5$ ,

$\mu(x=A2) = 0.2$ ,  $\mu(y=B1) = 0.1$  and  $\mu(y=B2) = 0.7$ , ke anteseden dari aturan fuzzy

Untuk aturan fuzzy dengan anteseden lebih dari 1, operator fuzzy (AND atau OR) digunakan untuk mencapai sebuah nilai tunggal yang merepresentasikan hasil rule fuzzy. Nilai ini kemudian diaplikasikan ke fungsi keanggotaan konsekuen

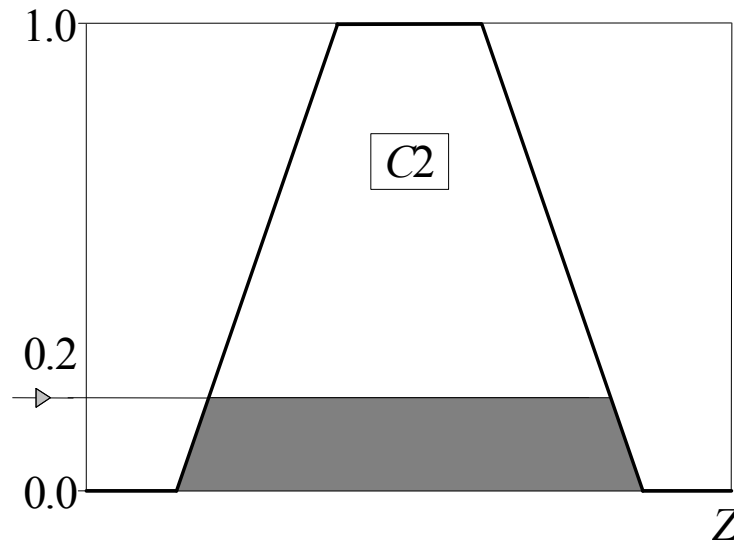
# Model Fuzzy Mamdani



# Model Fuzzy Mamdani

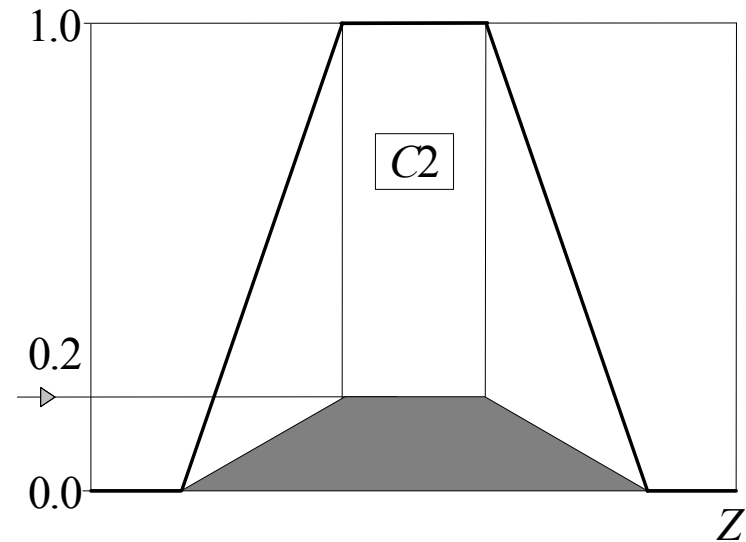
Dua teknik yang umum digunakan untuk mengaplikasikan hasil evaluasi anteseden ke fungsi keanggotaan konsekuen:

*Degree of Membership*



**clipping**

*Degree of Membership*

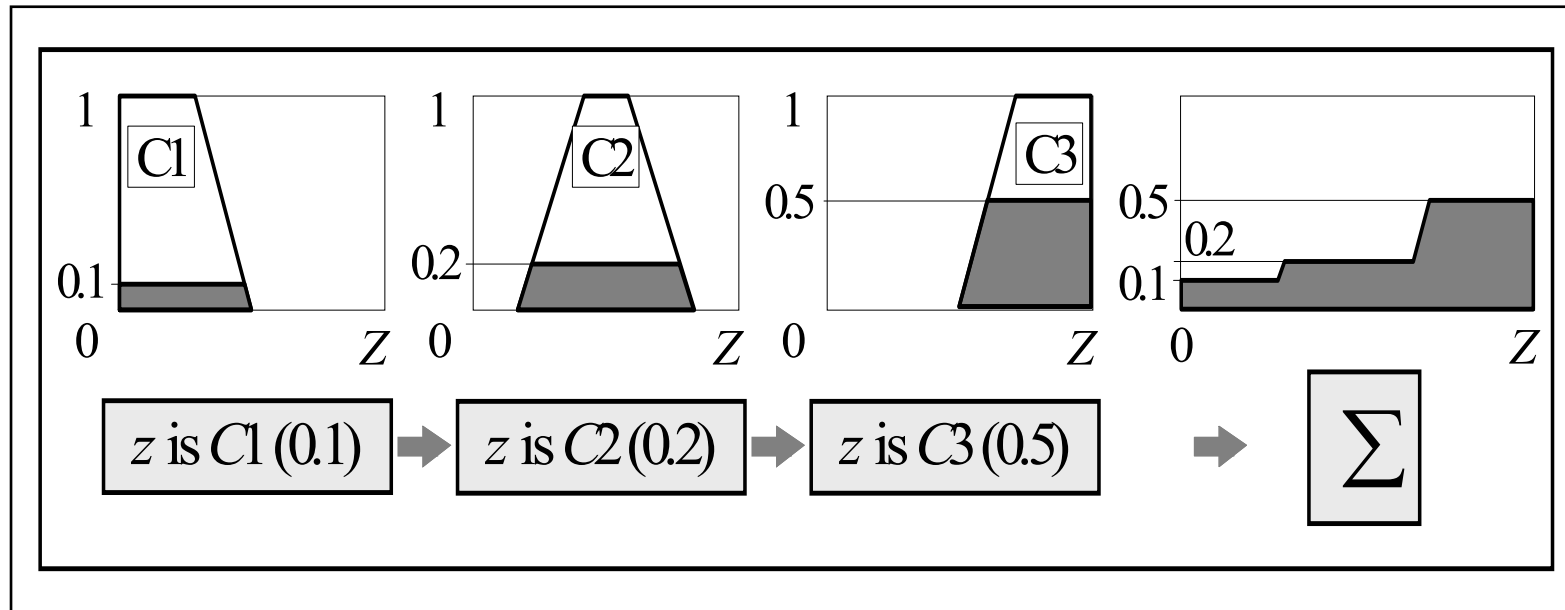


**scaling**



# Model Fuzzy Mamdani

**Composisi:** agregasi keluaran semua rule ke dalam himpunan fuzzy tunggal.



# Model Fuzzy Mamdani

**Defuzzifikasi:** konversi dari himpunan fuzzy yang dihasilkan dari komposisi ke dalam crisp value.

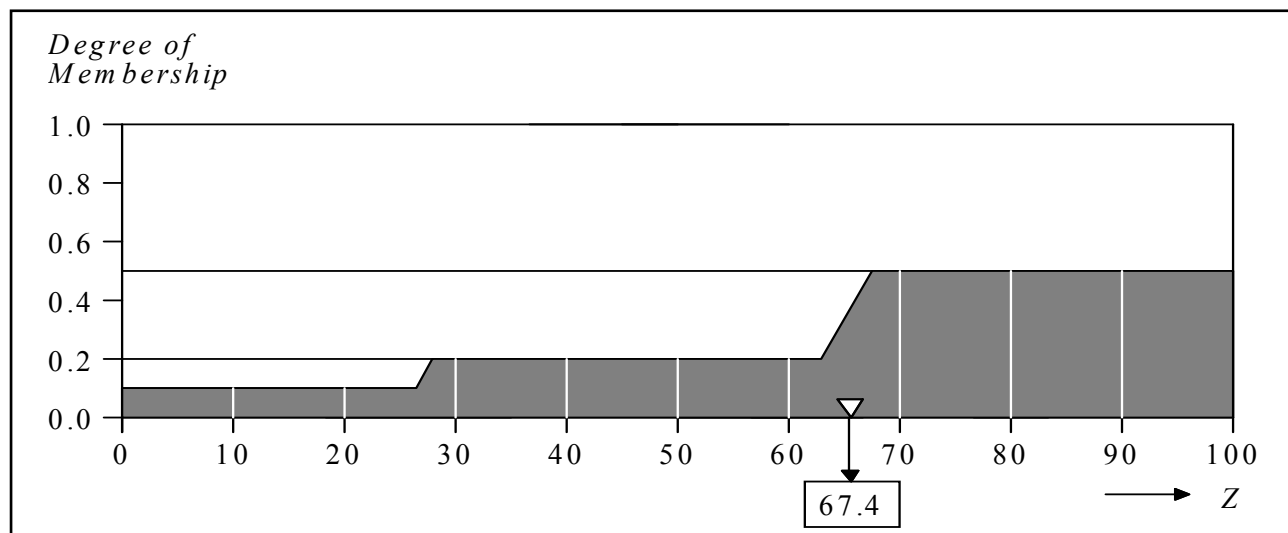
Teknik yang paling populer adalah **centroid technique**. Metoda ini mencari **centre of gravity (COG)** dari *aggregate set*:

$$COG = \frac{\int_a^b \mu_A(x) x dx}{\int_a^b \mu_A(x) dx}$$

# Model Fuzzy Mamdani

**Centre of gravity (COG):** mencari titik yang membagi area solusi menjadi 2 bagian yang sama

$$COG = \frac{(0+10+20) \times 0.1 + (30+40+50+60) \times 0.2 + (70+80+90+100) \times 0.5}{0.1+0.1+0.1+0.2+0.2+0.2+0.2+0.5+0.5+0.5+0.5} = 67.4$$



# Model Fuzzy Sugeno

Inferensi Mamdani tidak efisien karena melibatkan proses pencarian centroid dari area 2 dimensi.

**Michio Sugeno** mengusulkan penggunaan singleton sebagai fungsi keanggotaan dari konsekuen. **Singleton** adalah sebuah himpunan fuzzy dengan fungsi keanggotaan: pada titik tertentu mempunyai sebuah nilai dan 0 di luar titik tersebut.

# Model Fuzzy Sugeno

Perbedaan antara Mamdani dan Sugeno ada pada konsekuen. Sugeno menggunakan konstanta atau fungsi matematika dari variabel input:

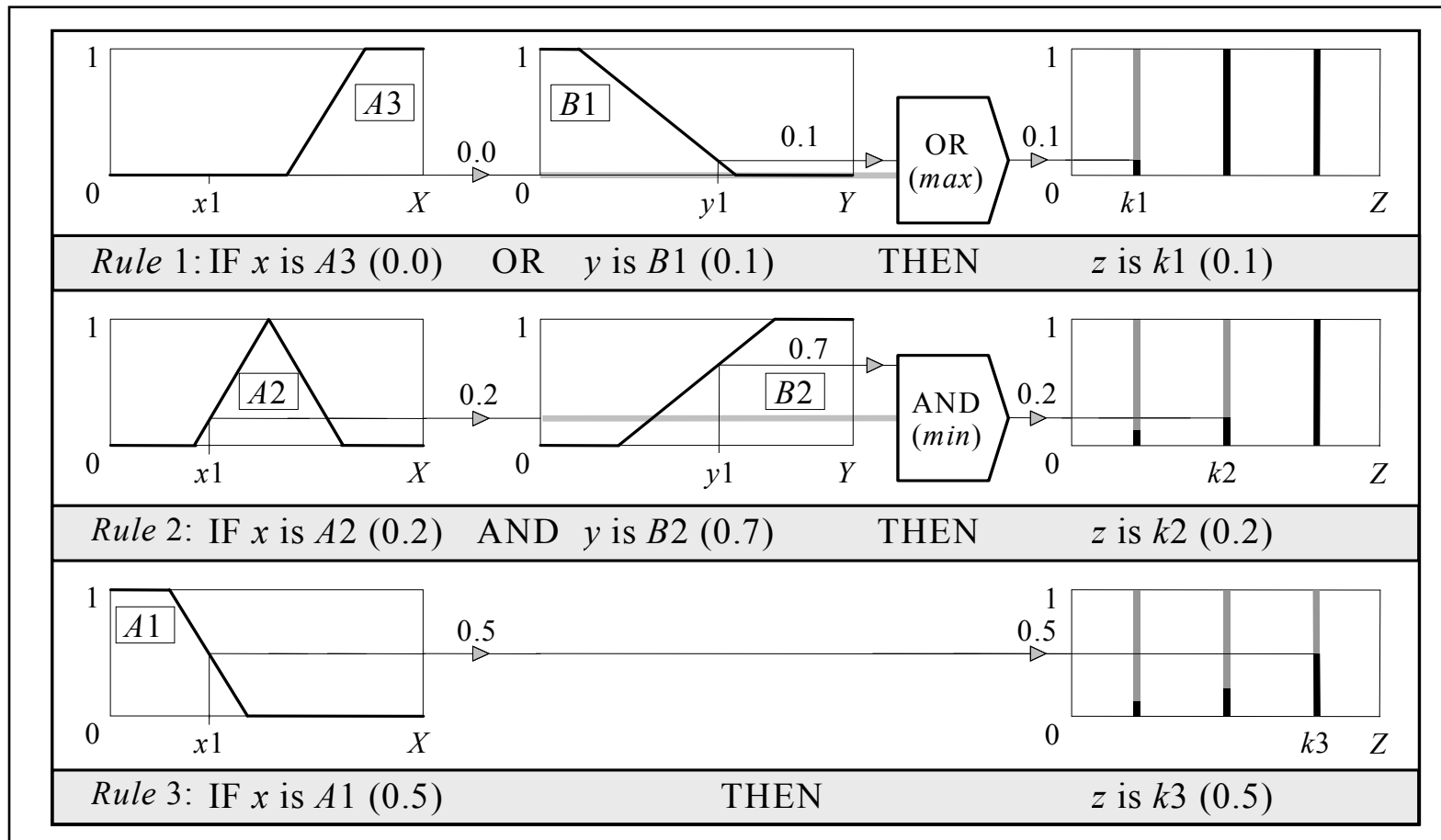
IF  $x$  is A  
AND  $y$  is B  
THEN  $z$  is  $f(x, y)$

IF  $x$  is A  
AND  $y$  is B  
THEN  $z$  is  $k$

dimana  $x$ ,  $y$  dan  $z$  adalah variabel linguistik; A dan B himpunan fuzzy untuk X dan Y, dan  $f(x, y)$  adalah fungsi matematik.

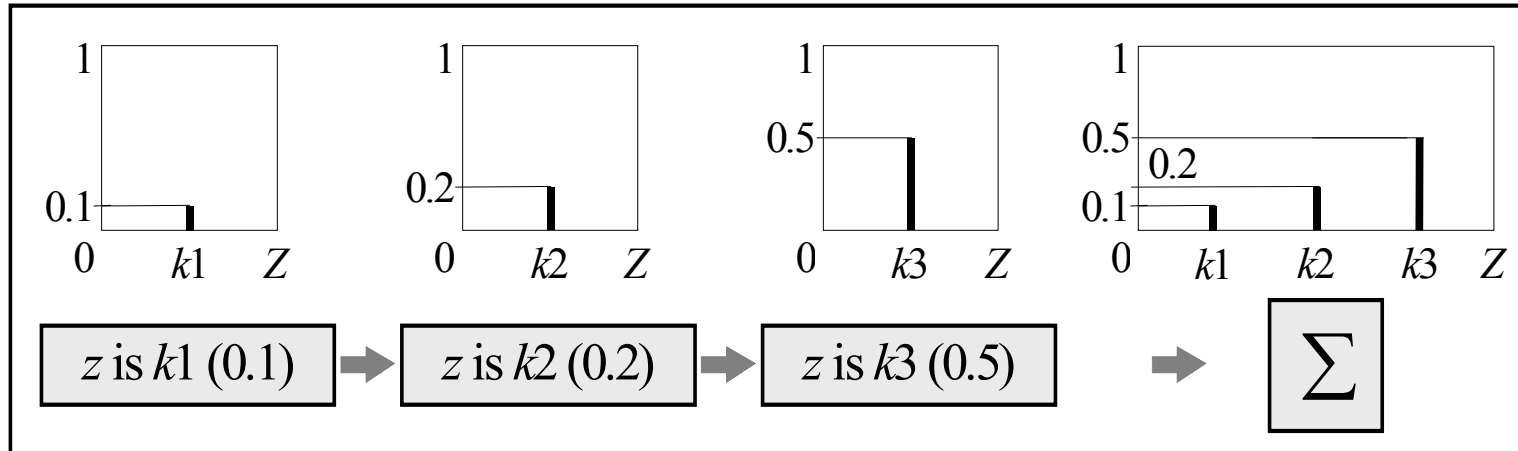
# Model Fuzzy Sugeno

## Evaluasi Rule



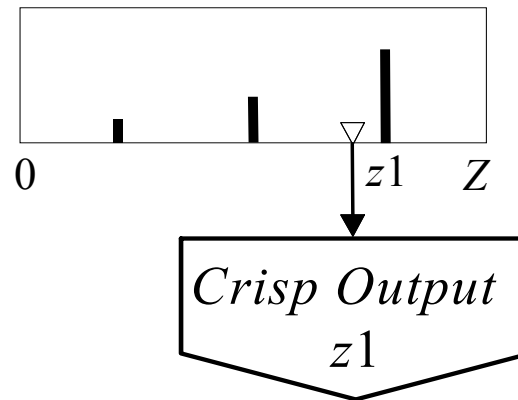
# Model Fuzzy Sugeno

## Komposisi



# Model Fuzzy Sugeno

## Defuzzifikasi



Weighted average (WA):

$$WA = \frac{\mu(k1) \times k1 + \mu(k2) \times k2 + \mu(k3) \times k3}{\mu(k1) + \mu(k2) + \mu(k3)} = \frac{0.1 \times 20 + 0.2 \times 50 + 0.5 \times 80}{0.1 + 0.2 + 0.5} = 65$$



# Model Fuzzy Sugeno: Contoh

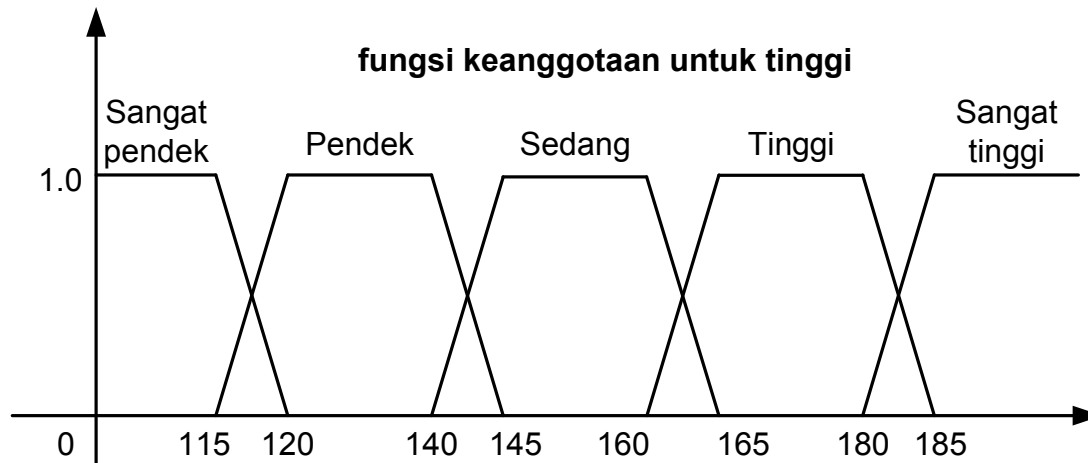
Mengevaluasi kesehatan orang berdasarkan tinggi dan berat badannya

Input: tinggi dan berat badan

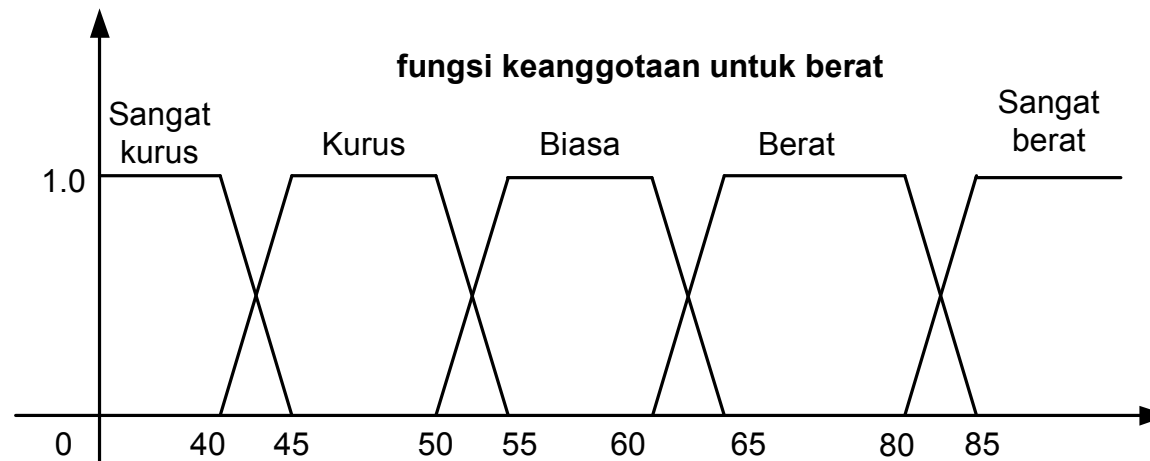
Output: kategori sehat

- sangat sehat (SS), index=0.8
- sehat (A), index=0.6
- agak sehat (AS), index=0.4
- tidak sehat (TS), index=0.2

# L1: Fuzzification (1)



Ada 3 variabel fuzzy yang dimodelkan: tinggi, berat, sehat



## L2: Rules Evaluation (1)

Tentukan rules

Tabel Kaidah Fuzzy

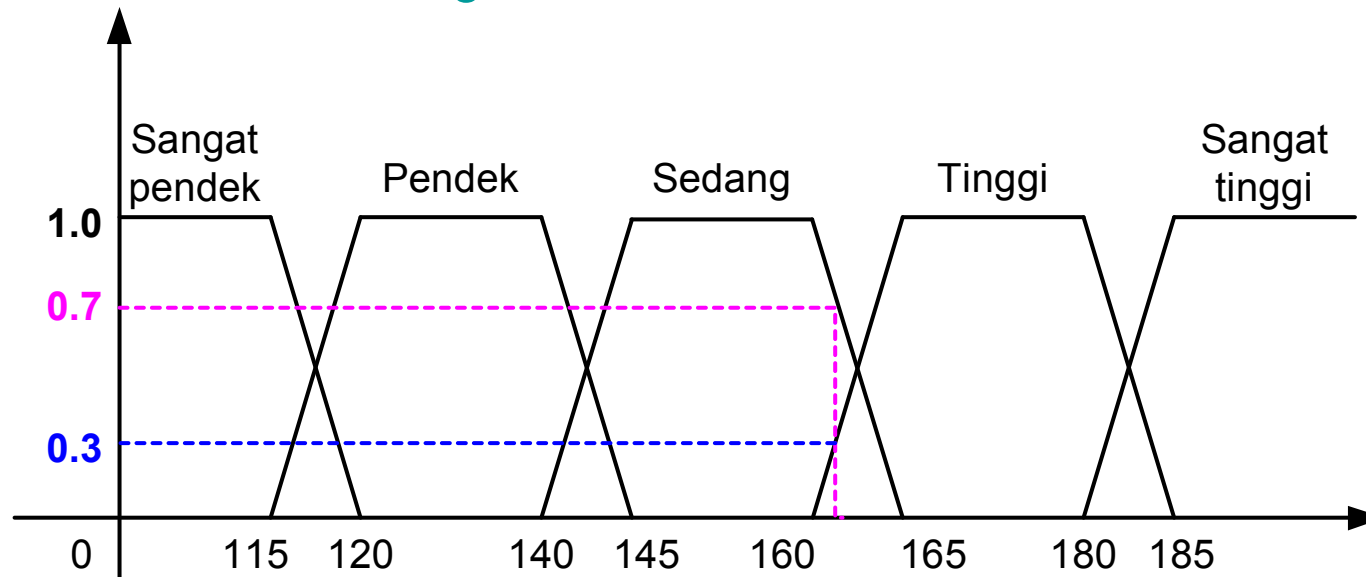
BERAT						
T I N G G I		Sangat kurus	Kurus	Biasa	Berat	Sangat berat
	Sangat pendek	SS	S	AS	TS	TS
	Pendek	S	SS	S	AS	TS
	Sedang	AS	SS	SS	AS	TS
	Tinggi	TS	S	SS	S	TS
	Sangat tinggi	TS	AS	SS	S	AS

Dalam bentuk if-then, contoh:

*If sangat pendek dan sangat kurus then  
sangat sehat*

## L2: Rules Evaluation (2)

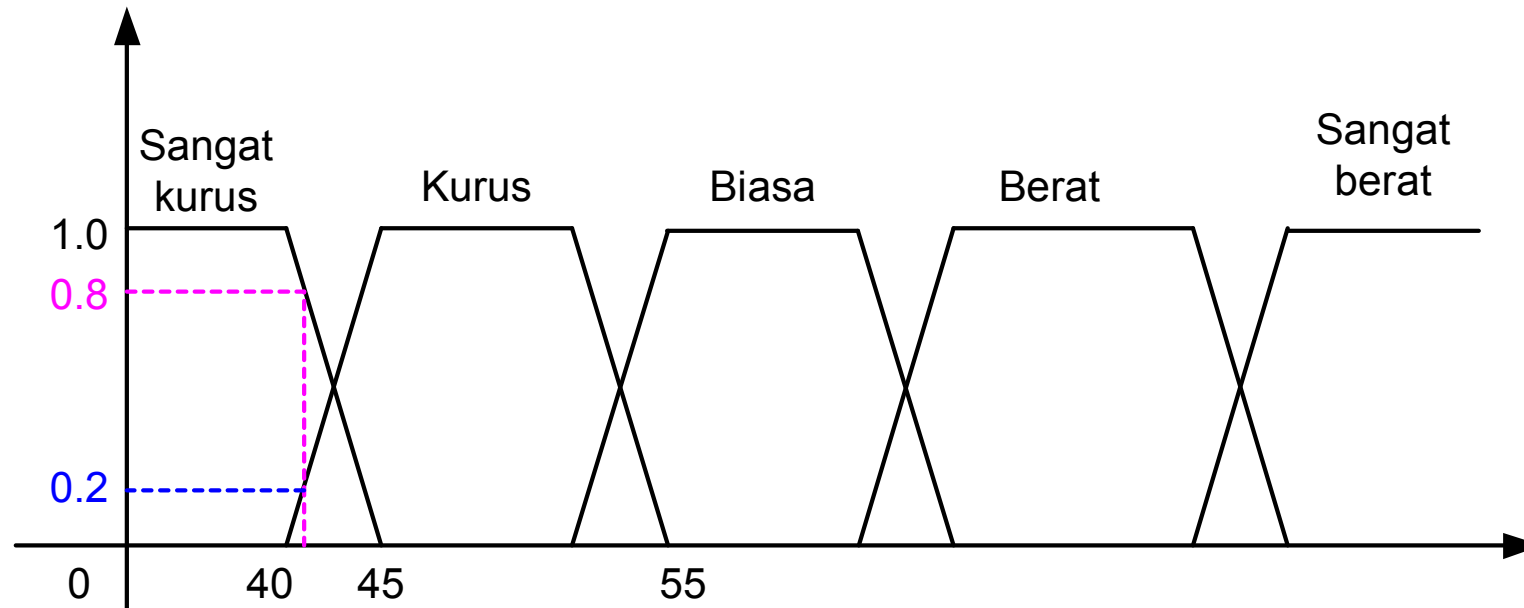
Contoh: bagaimana kondisi kesehatan untuk orang dengan tinggi 161.5 cm dan berat 41 kg?



$$\mu_{\text{sedang}}[161.5] = (165 - 161.5) / (165 - 160) = 0.7$$

$$\mu_{\text{tinggi}}[161.5] = (161.5 - 160) / (165 - 160) = 0.3$$

## L2: Rules Evaluation (3)



$$\mu_{\text{sangat kurus}}[41] = (45-41)/(45-40) = 0.8$$

$$\mu_{\text{kurus}}[41] = (41-40)/(45-40) = 0.2$$

BERAT						
T I N G G I		0.8	0.2	Biasa	Berat	Sangat berat
	Sangat pendek	SS	S	AS	TS	TS
	Pendek	S	SS	S	AS	TS
	0.7	AS	SS	SS	AS	TS
	0.3	TS	S	SS	S	TS
	Sangat tinggi	TS	AS	SS	S	AS

## L2: Rules Evaluation (4)

Pilih bobot minimum  
krn relasi AND

BERAT						
T I N G G I		0.8	0.2	Biasa	Berat	Sangat berat
	Sangat pendek	SS	S	AS	TS	TS
	Pendek	S	SS	S	AS	TS
	0.7	0.7	0.2	SS	AS	TS
	0.3	0.3	0.2	SS	S	TS
	Sangat tinggi	TS	AS	SS	S	AS

## L3: Defuzzification

Diperoleh:

$$f = \{TS, AS, S, SS\} = \{0.3, 0.7, 0.2, 0.2\}$$

Penentuan hasil akhir, ada 2 metoda:

1. Max method: index tertinggi 0.7  
hasil Agak Sehat

2. Centroid method, dengan metoda **Sugeno**:

$$\begin{aligned} \text{Decision Index} &= \frac{(0.3 \times 0.2) + (0.7 \times 0.4) + (0.2 \times 0.6) + (0.3 \times 0.8)}{(0.3 + 0.7 + 0.2 + 0.2)} \\ &= 0.4429 \end{aligned}$$

Crisp decision index = 0.4429

Fuzzy decision index: 75% agak sehat, 25% sehat

# Model Fuzzy Tsukamoto

- Karakteristik:  
Konsekuen dari setiap aturan if-then fuzzy direpresentasikan dengan himpunan fuzzy monoton

[EMD – Fuzzy Logic, 2004] Contoh:

Sebuah pabrik elektronik dapat berhasil mencapai permintaan terbesar sebanyak 5000 barang/hari. Namun pernah pabrik tersebut hanya mencapai permintaan barang sebanyak 1000 barang/hari. Persediaan barang di gudang dapat mencapai titik tertinggi yaitu 600 barang/hari dan titik terendahnya 100 barang/hari. Dengan semua keterbatasannya, pabrik tersebut dapat memproduksi barang maksimum 7000 barang/hari dan minimalnya 2000 barang/hari. Apabila proses produksi pabrik tersebut menggunakan aturan fuzzy sebagai berikut



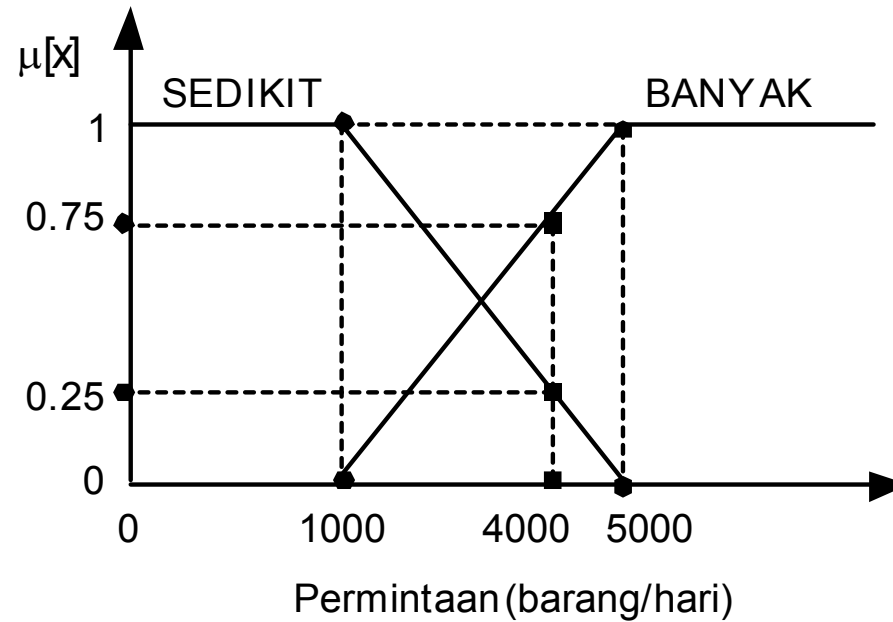
# Model Fuzzy Tsukamoto

- [A1] IF Permintaan BANYAK And Persediaan BANYAK  
THEN Produksi Barang BERTAMBAH ;
- [A2] IF permintaan SEDIKIT And persediaan SEDIKIT  
THEN Produksi Barang BERKURANG ;
- [A3] IF Permintaan SEDIKIT And Persediaan BANYAK  
THEN Produksi Barang BERKURANG ;
- [A4] IF permintaan BANYAK And persediaan SEDIKIT  
THEN Produksi Barang BERTAMBAH ;

Berapa barang elektronik tersebut harus diproduksi jika jumlah permintaannya sebanyak 4000 barang dan persediaan di gudang masih 300 barang ?

# Contoh (2)

**Permintaan;** terdiri atas 2 himpunan fuzzy, yaitu BANYAK dan SEDIKIT



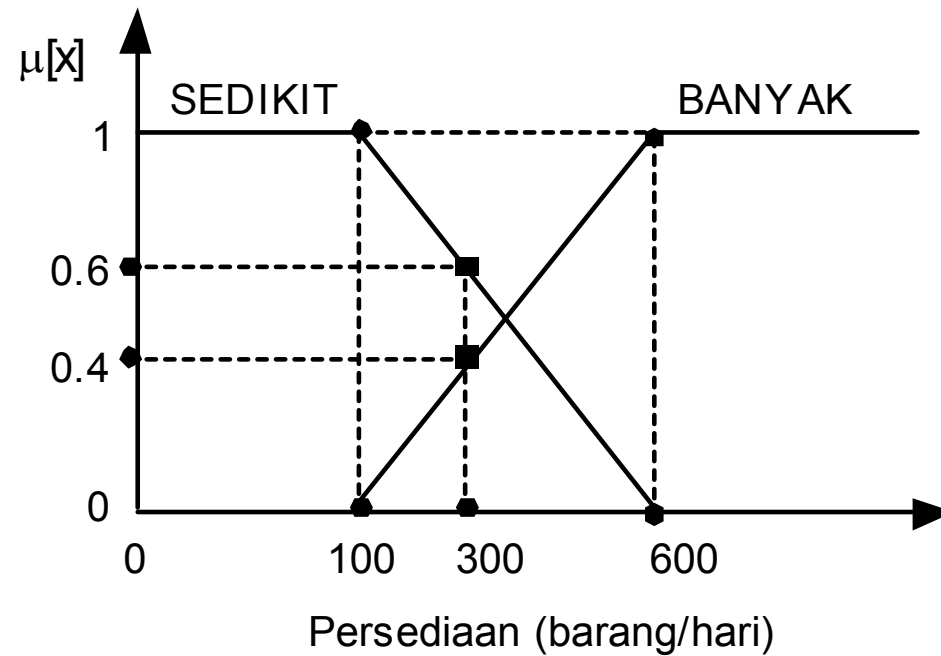
**Nilai Keanggotaan :**

$$\begin{aligned}\mu_{\text{PmtSEDIKIT}}[4000] &= (5000-4000)/(5000-1000) \\ &= 0.25\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mu_{\text{PmtBANYAK}}[4000] &= (4000-1000)/(5000-1000) \\ &= 0.75\end{aligned}$$

# Contoh (3)

**Persediaan;** terdiri atas 2 himpunan fuzzy, yaitu BANYAK dan SEDIKIT



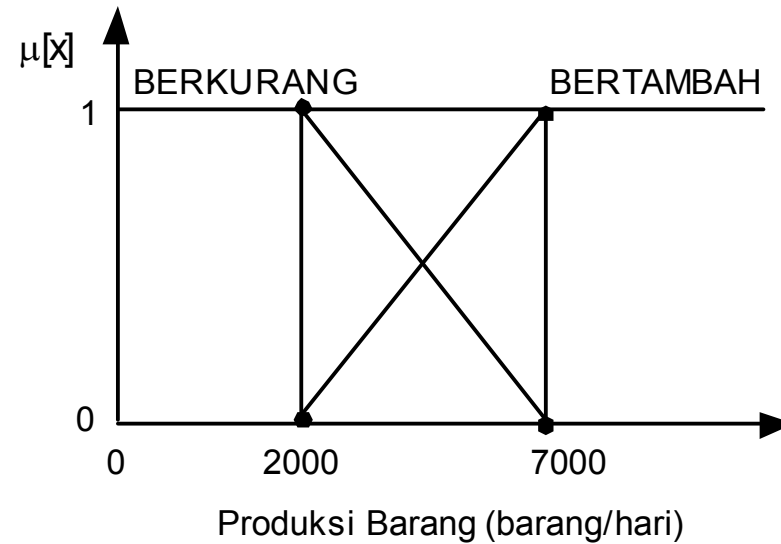
**Nilai Keanggotaan :**

$$\begin{aligned}\mu_{PsdSEDIKIT}[300] &= (600-300)/(600-100) \\ &= 0.6\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mu_{PsdBANYAK}[300] &= (300-100)/(600-100) \\ &= 0.4\end{aligned}$$

# Contoh (4)

## Produksi Barang



Nilai Keanggotaan :

$$\mu_{Pr Brg BERKURANG}[z] = \begin{cases} 1, & z \leq 2000 \\ \frac{7000 - z}{7000 - 2000}, & 2000 < z < 7000 \\ 0, & z \geq 7000 \end{cases}$$

$$\mu_{Pr Brg BERTAMBAH}[z] = \begin{cases} 0 & z \leq 2000 \\ \frac{z - 2000}{7000 - 2000} & 2000 < z < 7000 \\ 1 & z \geq 7000 \end{cases}$$

# Contoh (5)

PERMINTAAN			
PER SE DIAAN		B: 0.75	S: 0.25
	B: 0.4	Bertambah	Berkurang
	S: 0.6	Bertambah	Berkurang

PERMINTAAN			
PER SE DIAAN		B: 0.75	S: 0.25
	B: 0.4	0.4	0.25
	S: 0.6	0.6	0.25

PERMINTAAN			
PER SE DIAAN		B: 0.75	S: 0.25
	B: 0.4	4000	5750
	S: 0.6	5000	5750

## Contoh (6)

Defuzzification: mencari nilai z. Dapat dicari dengan metoda centroid [Tsukamoto](#) :

$$Z = \frac{\alpha_{pred_1} * Z_1 + \alpha_{pred_2} * Z_2 + \alpha_{pred_3} * Z_3 + \alpha_{pred_4} * Z_4}{\alpha_{pred_1} + \alpha_{pred_2} + \alpha_{pred_3} + \alpha_{pred_4}}$$

$$Z = \frac{0.4 * 4000 + 0.25 * 5750 + 0.25 * 5750 + 0.6 * 5000}{0.4 + 0.25 + 0.25 + 0.6}$$

$$Z = 4983$$

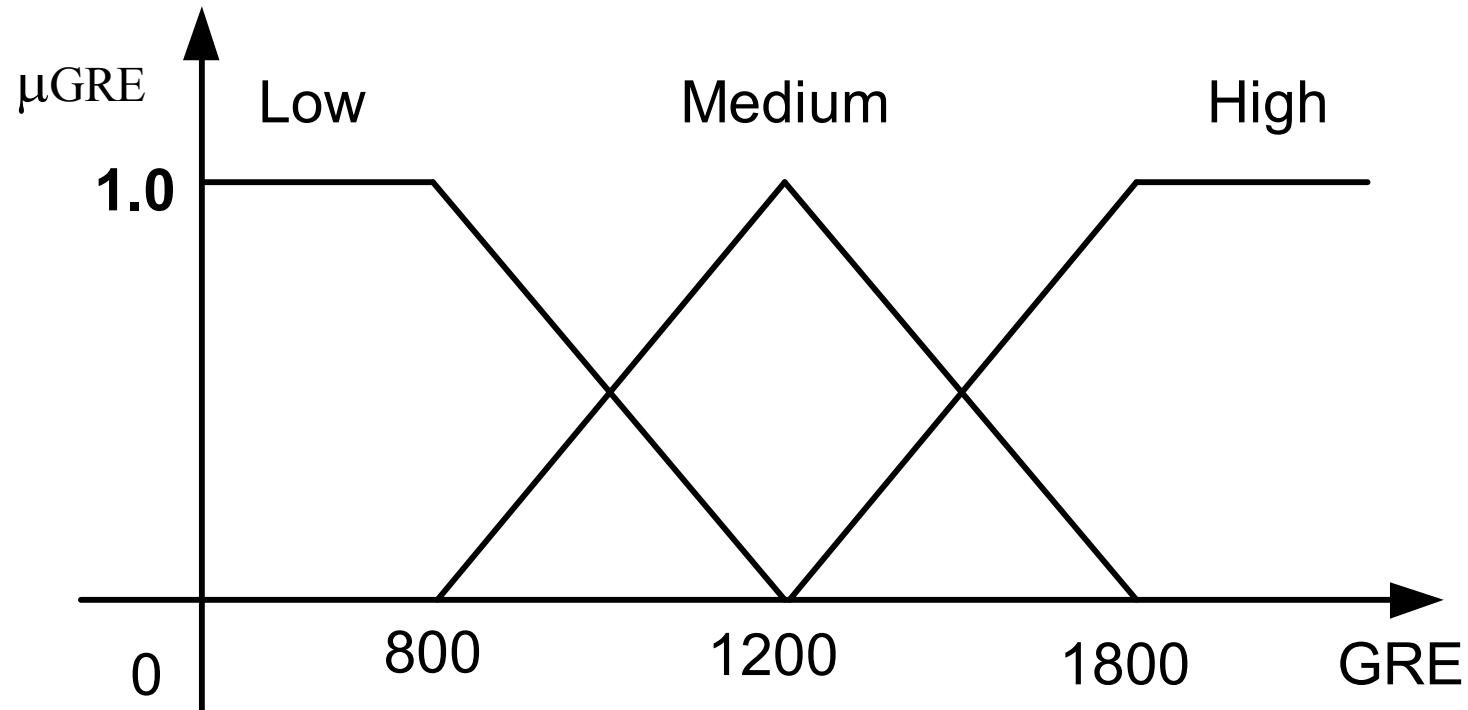
*Jadi barang elektronik yang harus diproduksi sebanyak 4983*

# Summary

- Ada 4 tahapan utama sistem pakar fuzzy: fuzzifikasi, inferensi, komposisi, defuzzifikasi.
- 2 metoda yang paling banyak dipakai: Mamdani dan Sugeno.
- Metoda Mamdani menggunakan himpunan fuzzy sebagai konsekuen rule, Metoda Sugeno menggunakan fungsi matematik atau konstanta.
- Mamdani: komputasi lebih berat, human-like inference, Sugeno: komputasi lebih efisien tetapi kehilangan interpretabilitas linguistik.

## Soal

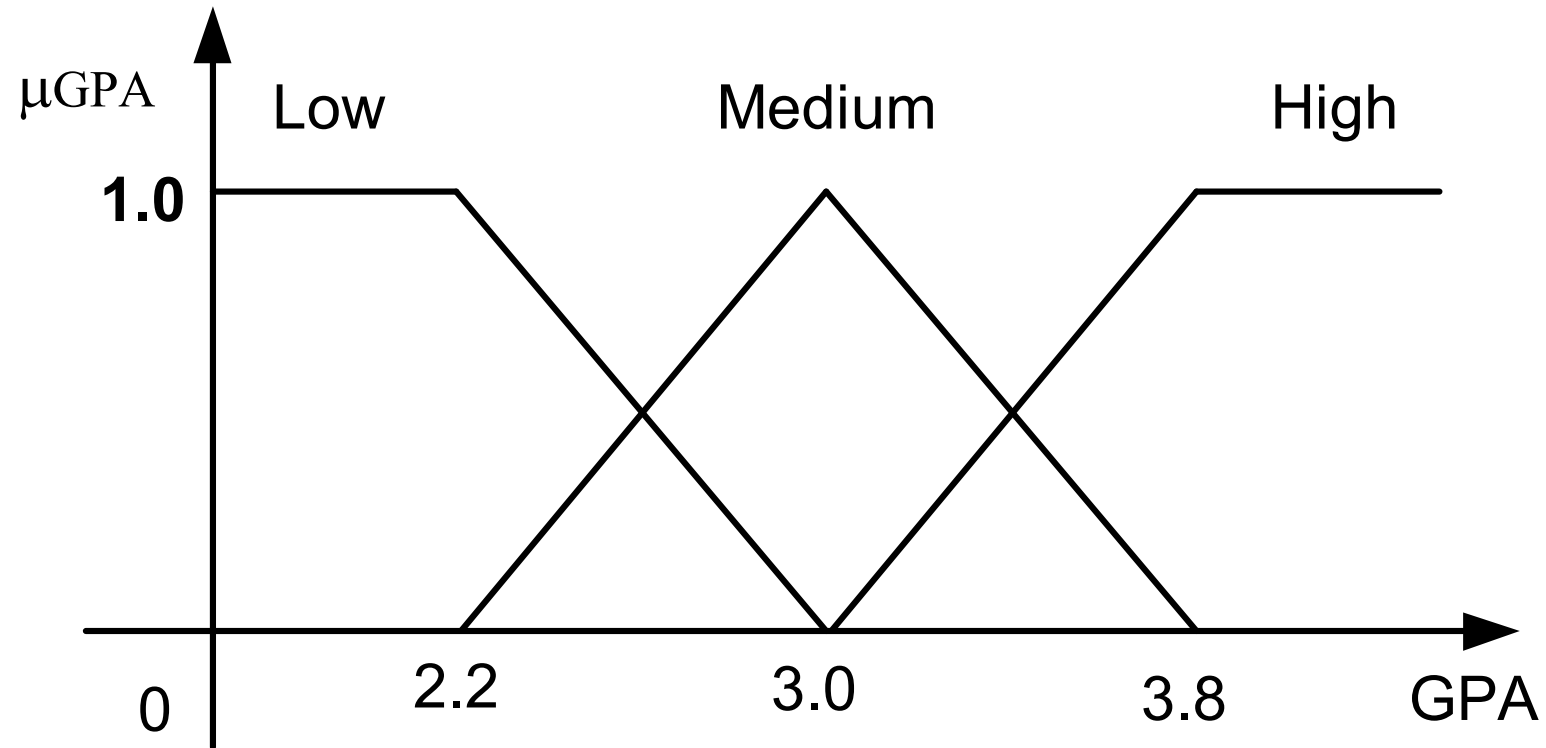
Mengevaluasi mahasiswa berdasarkan GPA dan nilai GRE



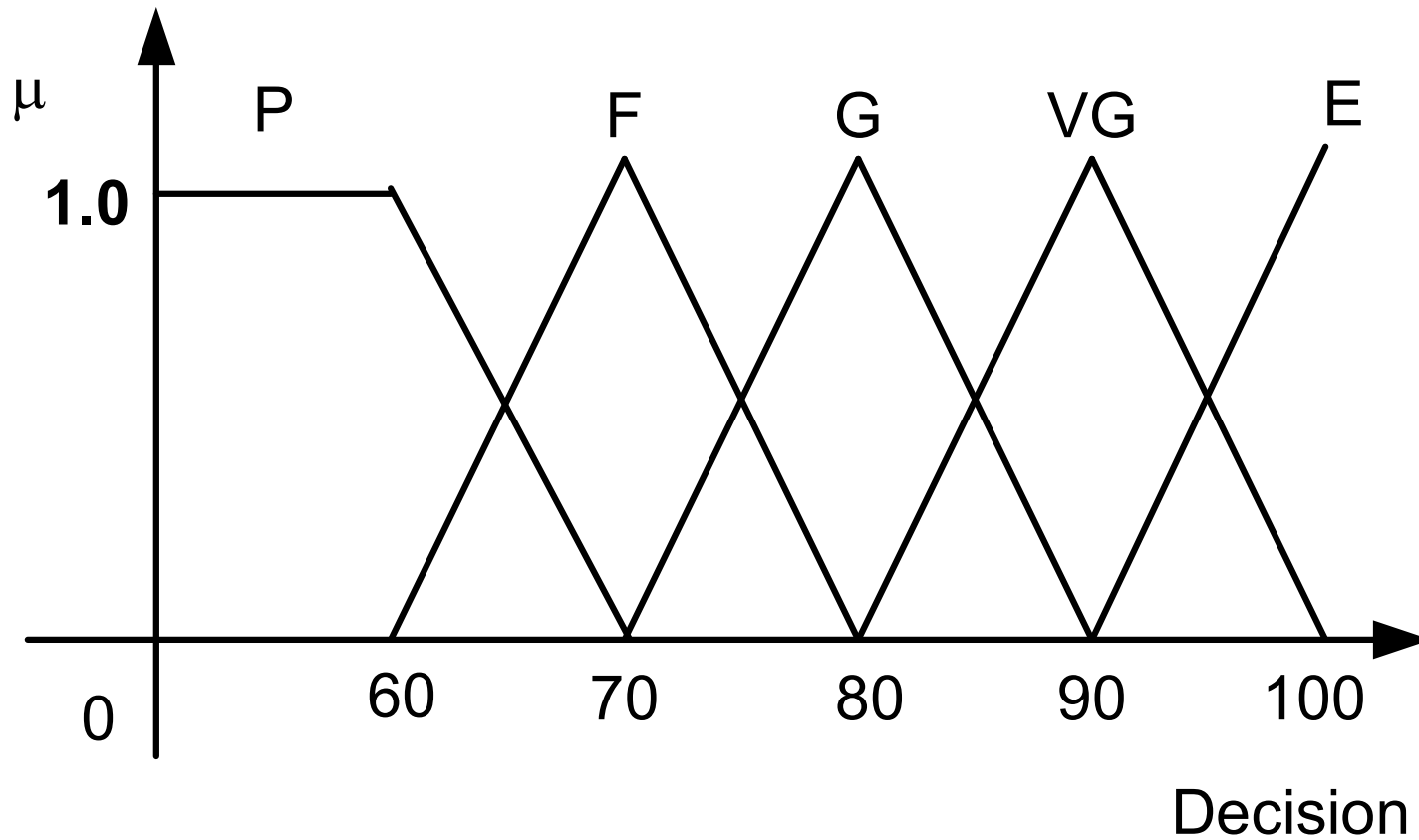
Fungsi Keanggotaan untuk GRE



## Fungsi Keanggotaan untuk GPA



# Soal



# Soal

GRE				
G P A		H	M	L
	H	E	VG	F
	M	G	G	P
	L	F	P	P